

1

(1)

$|\vec{a}| = \sqrt{7}$, $|\vec{b}| = \sqrt{5}$ である.

$|\overline{AB}| = \sqrt{6}$ より

$$|\overline{OB} - \overline{OA}| = \sqrt{6}$$

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = 6$$

$$|\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 = 6$$

$$5 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 7 = 6$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \quad \cdots \textcircled{1} \quad \cdots \text{ (答)}$$

また, 点 C から辺 OA, OB に下した垂線の足を M, N と

すれば, 三角形の外心は各辺の垂直二等分線の交点である

ことから, M, N は辺 OA, OB の中点である.

ゆえに, $\angle COA = \alpha$, $\angle COB = \beta$ とすれば

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\overline{OA}| |\overline{OC}| \cos \alpha = OA \times OM = OA \times \frac{1}{2} OA = \frac{7}{2} \quad \cdots \textcircled{2} \quad \cdots \text{ (答)}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = |\overline{OB}| |\overline{OC}| \cos \beta = OB \times ON = OB \times \frac{1}{2} OB = \frac{5}{2} \quad \cdots \textcircled{3} \quad \cdots \text{ (答)}$$

((1) 別解))

点 M, N は解答と同様に定める.

$$OA \perp MC \quad \text{より} \quad \overline{OA} \cdot (\overline{OC} - \overline{OM}) = 0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$OB \perp NC \quad \text{より} \quad \overline{OB} \cdot (\overline{OC} - \overline{ON}) = 0 \quad \cdots \textcircled{5}$$

④より

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{c} - \frac{1}{2} \vec{a} \right) = 0 \quad \therefore \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2} |\vec{a}|^2 = \frac{7}{2} \quad \cdots \text{ (答)}$$

⑤より

$$\vec{b} \cdot \left(\vec{c} - \frac{1}{2} \vec{b} \right) = 0 \quad \therefore \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2} |\vec{b}|^2 = \frac{5}{2} \quad \cdots \text{ (答)}$$

(2)

$$\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b} \quad \cdots \textcircled{6} \quad \text{と, } \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ より}$$

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot (s\vec{a} + t\vec{b}) = \frac{7}{2} \\ \vec{b} \cdot (s\vec{a} + t\vec{b}) = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s|\vec{a}|^2 + t\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{7}{2} \\ s\vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{b}|^2 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14s + 6t = 7 \\ 6s + 10t = 5 \end{cases}$$

$$(s, t) = \left(\frac{5}{13}, \frac{7}{26} \right) \quad \cdots \text{ (答)}$$

((2) 別解))

外接円の半径を r とすれば

$$r = |\overline{OC}| = |\overline{AC}| = |\overline{BC}|$$

すなわち

$$\begin{cases} |\overline{OC}| = |\overline{AC}| \\ |\overline{OC}| = |\overline{BC}| \end{cases}$$

$$\begin{cases} |\vec{c}| = |\vec{c} - \vec{a}| \\ |\vec{c}| = |\vec{c} - \vec{b}| \end{cases}$$

$$\begin{cases} |s\vec{a} + t\vec{b}|^2 = |(s-1)\vec{a} + t\vec{b}|^2 \\ |s\vec{a} + t\vec{b}|^2 = |s\vec{a} + (t-1)\vec{b}|^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7s^2 + 6st + 5t^2 = 7(s-1)^2 + 6(s-1)t + 5t^2 \\ 7s^2 + 6st + 5t^2 = 7s^2 + 6s(t-1) + 5(t-1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14s + 6t = 7 \\ 6s + 10t = 5 \end{cases}$$

$$(s, t) = \left(\frac{5}{13}, \frac{7}{26} \right) \quad \cdots \text{ (答)}$$

(3)

$\angle BOA = \theta$ とする. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ より

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$3 = \sqrt{7} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{35}}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{35}}$$

従って, B(x, y) とすれば

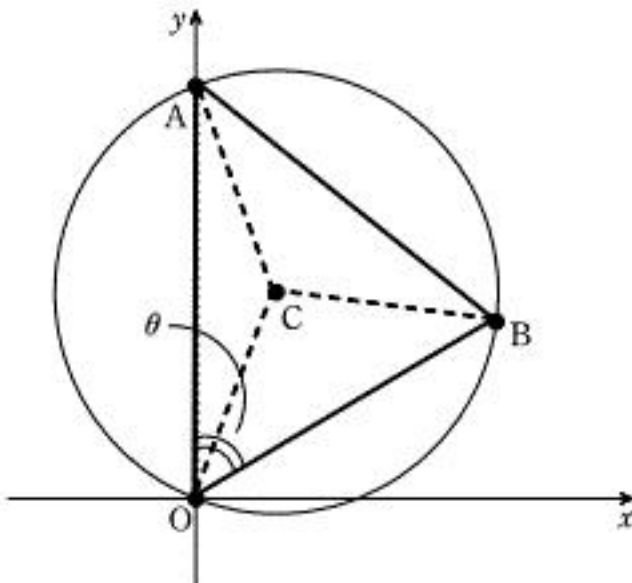
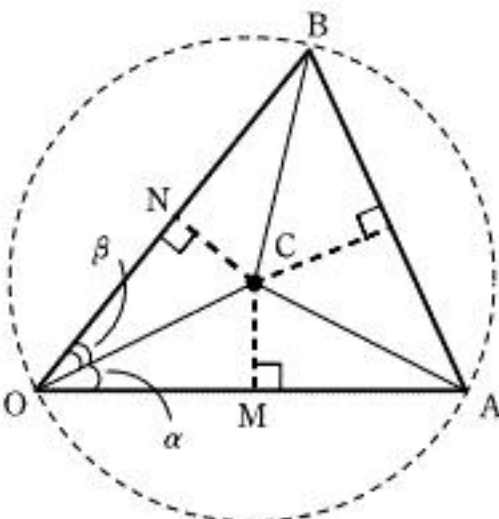
$$x = OB \sin \theta = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{7}}, \quad y = OB \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

すなわち B $\left(\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{7}}, \frac{3}{\sqrt{7}} \right)$ $\cdots$ (答)

また, ⑥より

$$\overline{OC} = \frac{5}{13} \overline{OA} + \frac{7}{26} \overline{OB} = \frac{5}{13} (0, \sqrt{7}) + \frac{7}{26} \left(\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{7}}, \frac{3}{\sqrt{7}} \right) = \left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{26}}, \frac{\sqrt{7}}{2} \right)$$

ゆえに, C $\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{26}}, \frac{\sqrt{7}}{2} \right)$ $\cdots$ (答)



(1)

袋 A から取り出した 3 個の玉が赤玉 1 個と白玉 2 個である確率は

$$\frac{{}_2C_1 \times {}_5C_2}{{}_7C_3} = \frac{2 \times 10}{35} = \frac{4}{7} \quad \cdots (\text{答})$$

また、白玉 3 個である確率は

$$\frac{{}_5C_3}{{}_7C_3} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7} \quad \cdots (\text{答})$$

(2)

袋 A から取り出される白玉の数に応じて場合を分ける.

ア) 袋 A から赤玉 1 個、白玉 2 個を取り出して袋 B に移す場合

$$p_1 = \frac{4}{7} \times \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{4}{7} \times \frac{1}{10} = \frac{2}{35}$$

イ) 袋 A から白玉 3 個を取り出して袋 B に移す場合

$$p_2 = \frac{2}{7} \times \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{2}{7} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{35}$$

ア、イは排反なので、求める確率は

$$p_1 + p_2 = \frac{2+3}{35} = \frac{1}{7} \quad \cdots (\text{答})$$

(3)

事象 S : 袋 B から取り出した玉が 2 個とも白玉

事象 T : 袋 B に白玉が残っている

と定める、求める条件付き確率は

$$P_S(T) = \frac{P(S \cap T)}{P(S)} = \frac{p_2}{p_1 + p_2} = \frac{3}{5} \quad \cdots (\text{答})$$

(1)

点 $D\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ とする。図形の対称性から

直線 l が正方形 $OABC$ の面積を 2 等分する $\Leftrightarrow$ 直線 l が点 D を通過する $\cdots (*)$

ゆえに

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}a + b \quad \therefore \quad a = 2b - 1 \quad \cdots \textcircled{1} \quad \cdots (\text{答})$$

((1) 参考))

(*) を前提に説明しないのであれば、直線 l が向かい合う 2 辺と共有点を持つことが必要条件であることを述べたうえで、 l が正方形の対角線の場合、対角線でない場合に分ける。

対角線の場合は正方形の面積を 2 等分していることは明らかであり、対角線でない場合は台形の面積から説明すれば、 $\textcircled{1}$ が問題なく導かれる。

(2)

直線 l が辺 OA と、両端の点 O, A を除く点で共有点を持つことが必要条件。ゆえに、

$$0 < b < 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

の下で考える。

$\textcircled{1}$ かつ $\textcircled{2}$ の下で、次の場合に分けて考える。

ア) 直線 l が辺 OP と共有点を持つ場合

このとき、直線 l と辺 OA との共有点を E 、辺 OP との共有点を F とすれば、 l が点 D を通ることから

$$OE < \frac{1}{2}OA, \quad OF < OP$$

ゆえに、 $0 < \triangle OEF < \frac{1}{2}\triangle OAP$ 。すなわち、この場合に $\triangle OEF = \triangle OAP$ が成り立つことはない。

イ) 直線 l が辺 AP と共有点を持つ場合

辺 AP の式は $y = -\frac{1}{t}x + 1$ なので、直線 l が辺 AP との共有点の x 座標は

$$ax + b = -\frac{1}{t}x + 1$$

$$\frac{at+1}{t}x = 1-b$$

ここで、 $\textcircled{2}$ より $0 < 1-b < 1$ 。ゆえに、 $at+1 \neq 0$ 。従って

$$x = \frac{t(1-b)}{at+1}$$

ゆえに、直線 l が三角形 OAP を 2 等分するのは

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \cdot t \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{t(1-b)}{at+1} (1-b)$$

$$t(at+1) = 2(1-b)^2t$$

$t \neq 0$ と $\textcircled{1}$ より

$$(2b-1)t+1 = 2(1-b)^2$$

$$2b^2 - 2(t+2)b + t+1 = 0$$

$$b = \frac{2(t+2) \pm \sqrt{4(t+2)^2 - 8(t+1)}}{4} = \frac{t+2 \pm \sqrt{t^2+2t+2}}{2}$$

このうち、 $0 < b < 1$ を満たすのは $b = \frac{t+2 - \sqrt{t^2+2t+2}}{2}$ 。

以上より

$$b = \frac{t+2 - \sqrt{t^2+2t+2}}{2} \quad \cdots (\text{答})$$

(3)

(2) より

$$\lim_{t \rightarrow +0} b = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \quad \cdots (\text{答})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} b = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t+2)^2 - (t^2+2t+2)}{2[(t+2) + \sqrt{t^2+2t+2}]}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t+1}{t+2 + \sqrt{t^2+2t+2}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{t}}{1 + \frac{2}{t} + \sqrt{1 + \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2}}}$$

$$= \frac{1}{1+1}$$

$$= \frac{1}{2} \quad \cdots (\text{答})$$

(1)

$$\frac{\log x}{x} = \frac{k}{x}$$

$$\log x = k \quad \cdots \textcircled{1}$$

この方程式が、 $1 < x < e$ の範囲にただ1つの実数解を持つ条件を求める。

$h(x) = \log x$ は $x > 0$ で単調増加。また

$$h(1) = 0, \quad h(e) = 1$$

であることから、求める k の範囲は $0 < k < 1$ $\cdots$ (答)

(2)

$0 < k < 1$ のとき、 $\textcircled{1}$ より $\log a = k$ 。 $\cdots \textcircled{2}$

また

$$\int \frac{\log x}{x} dx = \int (\log x)' \log x dx = \frac{1}{2} (\log x)^2 + C$$

より、 $F(x) = \frac{1}{2} (\log x)^2 - k \log x$ とおくと

$$\begin{aligned} S &= \int_1^a \left(\frac{k}{x} - \frac{\log x}{x} \right) dx + \int_a^e \left(\frac{\log x}{x} - \frac{k}{x} \right) dx \\ &= -F(a) + F(1) + F(e) - F(a) \\ &= F(1) + F(e) - 2F(a) \\ &= \left(\frac{1}{2} - k \right) - 2 \left(\frac{1}{2} (\log a)^2 - k \log a \right) \\ &= -(\log a)^2 + 2k \log a + \frac{1}{2} - k \end{aligned}$$

$\textcircled{2}$ より

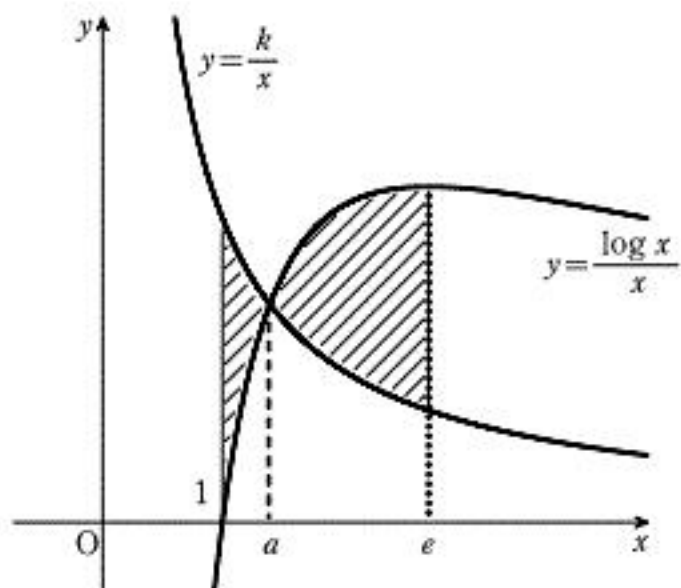
$$S = k^2 - k + \frac{1}{2} \quad \cdots \text{(答)}$$

(3)

$$S = \left(k - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4}$$

$\textcircled{1}$ より、 k の範囲は $0 < k < 1$ 。

ゆえに、最小値は $k = \frac{1}{2}$ のとき $S = \frac{1}{4}$ $\cdots$ (答)



$$f_n(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1} - \sum_{k=0}^n (-x)^{3k}(1+x) \quad \cdots \textcircled{1}$$

(1) ①より, $x \neq -1$ のとき

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1}{x^2 - x + 1} - (1+x) \sum_{k=0}^n (-x^3)^k \\ &= \frac{1}{x^2 - x + 1} - (1+x) \cdot \frac{1 - (-x^3)^{n+1}}{1 - (-x^3)} \\ &= \frac{1}{x^2 - x + 1} - (1+x) \cdot \frac{1 - (-x^3)^{n+1}}{(x+1)(x^2 - x + 1)} \\ &= \frac{1}{x^2 - x + 1} - \frac{1 - (-x^3)^{n+1}}{x^2 - x + 1} \\ &= \frac{(-x^3)^{n+1}}{x^2 - x + 1} \\ &= (-1)^{3n+3} \cdot \frac{x^{3n+3}}{x^2 - x + 1} \\ &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{3n+3}}{x^2 - x + 1} \end{aligned}$$

$x = -1$ のとき, ①より

$$\begin{aligned} f_n(-1) &= \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3} \\ f_n(x) &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{3n+3}}{x^2 - x + 1} \text{ に代入して,} \\ f_n(-1) &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{(-1)^{3n+3}}{3} \\ &= \frac{1}{3} \cdot (-1)^{4n+4} \\ &= \frac{1}{3} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

よって, $x = -1$ でも成立する.

以上より,

$$f_n(x) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{3n+3}}{x^2 - x + 1} \quad (\text{証明終})$$

(2)

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

より, $0 \leq x \leq 1$ で $\frac{3}{4} \leq x^2 - x + 1 \leq 1$. ゆえに

$$\left| \int_0^1 f_n(x) dx \right| = \left| \int_0^1 (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{3n+3}}{x^2 - x + 1} dx \right| \leq \int_0^1 \frac{4}{3} x^{3n+3} dx = \left[\frac{4}{3(3n+4)} x^{3n+4} \right]_0^1 = \frac{4}{3(3n+4)} \quad (\text{証明終})$$

(3)

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \left(\frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 (x^{3k} + x^{3k+1}) dx \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 x^{3k} (1+x) dx \\ &= \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-x)^{3k} (1+x) dx \end{aligned}$$

ここで, ①の辺々を $[0, 1]$ で定積分すると

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x + 1} - S_n$$

であり,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \int_0^1 \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} d\theta = \frac{2\sqrt{3}}{9} \pi \quad \left(x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \theta \text{ と置換}\right)$$

ゆえに, ①から

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{2\sqrt{3}}{9} \pi - S_n$$

(2) より

$$0 \leq \left| \frac{2\sqrt{3}}{9} \pi - S_n \right| = \left| \int_0^1 f_n(x) dx \right| \leq \frac{4}{3(3n+4)}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3(3n+4)} = 0$ なので, はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2\sqrt{3}}{9} \pi - S_n \right| = 0 \quad \therefore \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2\sqrt{3}}{9} \pi \quad \cdots (\text{答})$$