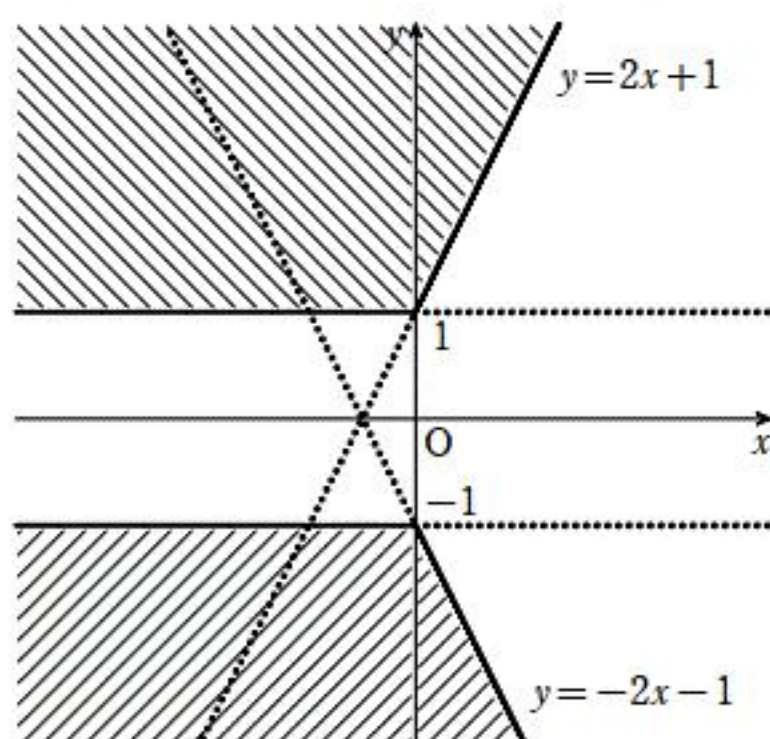


(1)

 $y \geq 0$ のとき $y \geq |x| + x + 1$ であり $x \geq 0$ のときは $y \geq 2x + 1$, $x \leq 0$ のときは $y \geq 1$ $y \leq 0$ のとき $y \leq -|x| - x - 1$ であり $x \geq 0$ のときは $y \leq -2x - 1$, $x \leq 0$ のときは $y \leq -1$

以上を図示すると、下図斜線部。ただし、境界はすべて含む。



(2)

$$f(x) = \begin{cases} (x-2) + (a+1)x - 2 = (a+2)x - 4 & (x \geq 2) \\ -(x-2) + (a+1)x - 2 = ax & (x \leq 2) \end{cases}$$

すなわち、 $x \geq 2$ で $f(x) = 0$ となる x は

$$(a+2)x = 4$$

 $a = -2$ で等号は成り立たないので、 $a \neq -2$ として、 $x = \frac{4}{a+2}$ 。すなわち

$$\begin{aligned} \frac{4}{a+2} \geq 2 & \Leftrightarrow 4(a+2) \geq 2(a+2)^2 \quad \text{かつ} \quad a \neq -2 \\ & \Leftrightarrow (a+2)((a+2)-2) \leq 0 \quad \text{かつ} \quad a \neq -2 \\ & \Leftrightarrow a(a+2) \leq 0 \quad \text{かつ} \quad a \neq -2 \\ & \Leftrightarrow -2 < a \leq 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

また、 $x \leq 2$ で $f(x) = 0$ となるのは

$$ax = 0$$

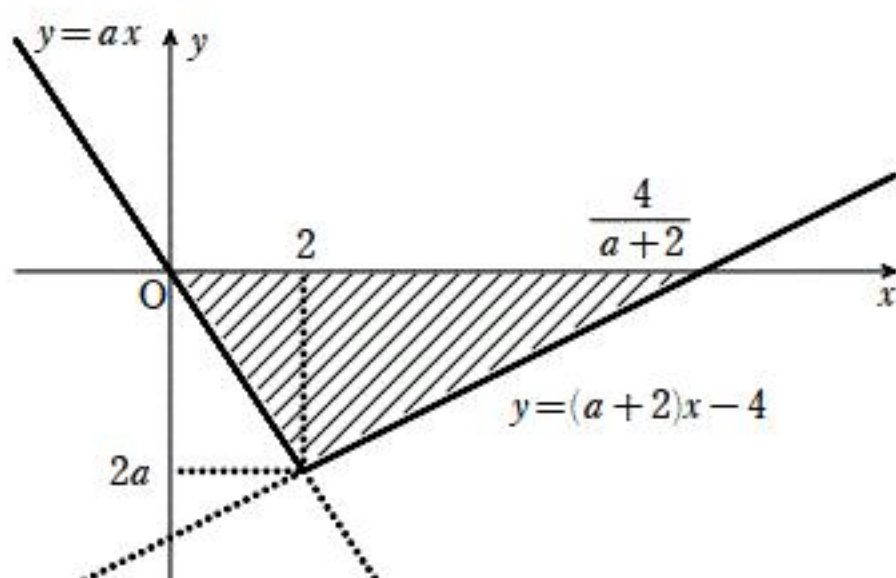
 $a = 0$ のとき、 $y = f(x)$ のうち $x \leq 2$ の部分が x 軸と重なり、条件を満たさない。すなわち、 $a \neq 0$ として、 $x = 0$ 。これは $x \leq 2$ を満たす。

すなわち、求める範囲は

$$\textcircled{1} \quad \text{かつ} \quad a \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < a < 0 \quad \dots (\text{答})$$

このとき、求める領域は図の三角形となり、その面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{a+2} \cdot (-2a) = -\frac{4a}{a+2} \quad \dots (\text{答})$$



(1)

曲線 C_2 上の点 $(t, t^2 + c^2)$ における接線の方程式は, $y' = 2x$ より

$$y - (t^2 + c^2) = 2t(x - t) \quad \therefore y = 2tx - t^2 + c^2$$

すなわち, 点 $T_1(b_1, b_1^2 + c^2)$, 点 $T_2(b_2, b_2^2 + c^2)$ における接線 l_1, l_2 の方程式はそれぞれ

$$l_1: y = 2b_1x - b_1^2 + c^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$l_2: y = 2b_2x - b_2^2 + c^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$2b_1x - b_1^2 + c^2 = 2b_2x - b_2^2 + c^2$$

$$2(b_1 - b_2)x = (b_1 - b_2)(b_1 + b_2)$$

$$x = \frac{b_1 + b_2}{2} \quad (b_1 \neq b_2 \text{ より})$$

このとき

$$y = 2b_1 \cdot \frac{b_1 + b_2}{2} - b_1^2 + c^2 = b_1b_2 + c^2$$

ゆえに, l_1, l_2 は点 $K\left(\frac{b_1 + b_2}{2}, b_1b_2 + c^2\right)$ で交わる.

一方, 点 K は (a, a^2) と表されることから

$$a = \frac{b_1 + b_2}{2} \quad \text{かつ} \quad a^2 = b_1b_2 + c^2$$

$$\Leftrightarrow a - b_1 = b_2 - a \quad \text{かつ} \quad c^2 = \left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)^2 - b_1b_2$$

$$\Leftrightarrow a - b_1 = b_2 - a \quad \text{かつ} \quad c = \frac{b_2 - b_1}{2}$$

$$\Leftrightarrow a - b_1 = b_2 - a = c \quad (\text{証明終})$$

(2)

C_2 と l_1, l_2 で囲まれる部分の面積を S とするとき

$$\begin{aligned} S &= \int_{b_1}^a (x - b_1)^2 dx + \int_a^{b_2} (x - b_2)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - b_1)^3 \right]_{b_1}^a + \left[\frac{1}{3}(x - b_2)^3 \right]_a^{b_2} \\ &= \frac{1}{3}(a - b_1)^3 - \frac{1}{3}(a - b_2)^3 \\ &= \frac{2}{3}c^3 \quad \dots (\text{答}) \quad (a - b_1 = b_2 - a = c \text{ より}) \end{aligned}$$

(1)

$$\overrightarrow{OP} = s\vec{a} + \vec{d}, \quad \overrightarrow{OQ} = t\vec{a} + \vec{c} \quad \cdots (\text{答})$$

である. また, $R(u, 1, 1) (0 \leq u \leq 1)$ とする. このとき

$$(4 \text{ 点 } O, P, Q, R \text{ が同一平面上}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{OR} = x\overrightarrow{OP} + y\overrightarrow{OQ} \text{ を満たす実数 } x, y \text{ が存在})$$

また

$$\overrightarrow{OR} = u\vec{a} + \vec{c} + \vec{d},$$

$$x\overrightarrow{OP} + y\overrightarrow{OQ} = x(s\vec{a} + \vec{d}) + y(t\vec{a} + \vec{c}) = (sx + ty)\vec{a} + y\vec{c} + x\vec{d}$$

$\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}$ は $\vec{0}$ でなく, 互いに平行でなく, 同一平面上にないことから

$$\begin{cases} u = sx + ty \\ 1 = y \\ 1 = x \end{cases}$$

すなわち, 4 点 O, P, Q, R が同一平面上にあることから, $x=1, y=1, u=s+t$.

$$\overrightarrow{OR} = (s+t)\vec{a} + \vec{c} + \vec{d} \quad \cdots (\text{答})$$

(2)

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = (s\vec{a} + \vec{d}) \cdot (t\vec{a} + \vec{c}) = st \quad \cdots (\text{答})$$

四角形 $OPQR$ は平行四辺形であることから

$$U = 2 \times \triangle OPQ$$

$$= \sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2 |\overrightarrow{OQ}|^2 - (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ})^2}$$

$$= \sqrt{(s^2 + 1)(t^2 + 1) - (st)^2}$$

$$= \sqrt{s^2 + t^2 + 1} \quad \cdots (\text{答})$$

(3)

$$0 \leq u \leq 1 \text{ かつ } u = s + t \text{ から, } 0 \leq s + t \leq 1.$$

すなわち, s, t の存在範囲は

$$0 \leq s \leq 1 \text{ かつ } 0 \leq t \leq 1 \text{ かつ } 0 \leq s + t \leq 1$$

この範囲における $s^2 + t^2$ の値域を考察する.

右図から

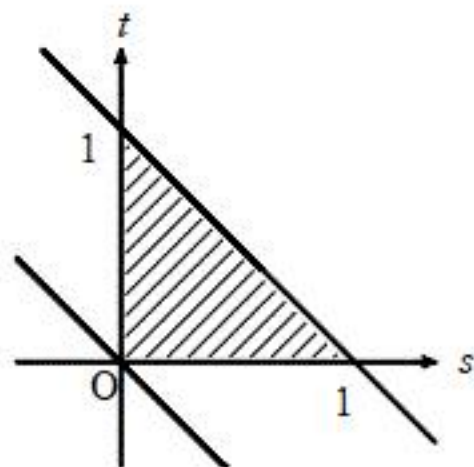
$$0 \leq s^2 + t^2 \leq 1^2$$

であることから, U の最大値, 最小値はそれぞれ

$$\text{最大値は } \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad (s, t) = (1, 0), (0, 1) \text{ のとき}$$

$$\text{最小値は } \sqrt{0+1} = 1, \quad (s, t) = (0, 0) \text{ のとき}$$

である. $\cdots (\text{答})$



$$(1) \quad Q(t) = P(t+1) = (t+1)^{2n} - n(t+1)^{n+1} + n(t+1)^{n-1} - 1$$

すなわち、2項展開により

$$(Q(t) \text{ の定数項}) = 1^{2n} - n \cdot 1^{n+1} + n \cdot 1^{n-1} - 1 = 0$$

$$(Q(t) \text{ の } t \text{ の係数}) = {}_{2n}C_1 - n \cdot {}_{n+1}C_1 + n \cdot {}_{n-1}C_1 = 2n - n(n+1) + n(n-1) = 0$$

また、 t^2 の係数について、 $n \geq 3$ のときは

$$\begin{aligned} (Q(t) \text{ の } t^2 \text{ の係数}) &= {}_{2n}C_2 - n \cdot {}_{n+1}C_2 + n \cdot {}_{n-1}C_2 \\ &= n(2n-1) - n \cdot \frac{(n+1)n}{2} + n \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} \\ &= n(2n-1) + \frac{n}{2}[(n-1)(n-2) - n(n+1)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

また、 $n=2$ のとき

$$(Q(t) \text{ の } t^2 \text{ の係数}) = {}_4C_2 - 2 \cdot {}_3C_2 = 6 - 6 = 0 \text{ である.} \quad (\text{証明終})$$

(2) $Q(t)$ の t^3 の係数を調べる. $n \geq 4$ のとき

$$\begin{aligned} (Q(t) \text{ の } t^3 \text{ の係数}) &= {}_{2n}C_3 - n \cdot {}_{n+1}C_3 + n \cdot {}_{n-1}C_3 \\ &= \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} - n \cdot \frac{(n+1)n(n-1)}{6} + n \cdot \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} \\ &= \frac{n}{6}[2(2n-1)(2n-2) - (n^3 - n) + (n^3 - 6n^2 + 11n - 6)] \\ &= \frac{1}{3}(n+1)n(n-1) \neq 0 \text{ である.} \end{aligned}$$

また、

$$n=2 \text{ のとき} \quad (Q(t) \text{ の } t^3 \text{ の係数}) = {}_4C_3 - 2 \cdot {}_3C_3 = 4 - 2 = 2 \neq 0$$

$$n=3 \text{ のとき} \quad (Q(t) \text{ の } t^3 \text{ の係数}) = {}_6C_3 - 3 \cdot {}_4C_3 = 20 - 12 = 8 \neq 0 \text{ である.}$$

以降、 $Q(t)$ の t^n の係数を a_n とする.

(1), (2) の考察より、 $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$, $a_{2n} = 1$ である.

このとき、 $Q(t) = \sum_{k=0}^{2n} a_k t^k$ と表される. $Q(t) = P(t+1)$ より、 $P(x) = Q(x-1)$ なので

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=0}^{2n} a_k (x-1)^k = (x-1)^{2n} + a_{2n-1}(x-1)^{2n-1} + \cdots + a_4(x-1)^4 + a_3(x-1)^3 \\ &= (x-1)^3[(x-1)^{2n-3} + a_{2n-1}(x-1)^{2n-4} + \cdots + a_4(x-1) + a_3] \end{aligned}$$

と表され、確かに $P(x)$ は $(x-1)^3$ で割り切れるが $(x-1)^4$ で割り切れない. (証明終)

(3)

$P(x) = 0$ が整数解 m を持つとすれば、 $P(m) = 0$ より

$$m^{2n} - nm^{n+1} + nm^{n-1} - 1 = 0$$

$$m(m^{2n-1} - nm^n + nm^{n-2}) = 1$$

$m^{2n-1} - nm^n + nm^{n-2}$ は $n \geq 2$ で整数なので、 $m = \pm 1$ のいずれかである.

$$P(1) = 1 - n + n - 1 = 0$$

$$P(-1) = 1 - n \cdot (-1)^{n+1} + n(-1)^{n-1} - 1 = n \cdot (-1)^{n-1}[1 - (-1)^2] = 0$$

より、確かに $x = \pm 1$ はいずれも $P(x) = 0$ の解である. (証明終)