

(1)

$$\overrightarrow{OP} = s\vec{a} + \vec{d}, \quad \overrightarrow{OQ} = t\vec{a} + \vec{c} \quad \cdots (\text{答})$$

である。また、 $R(u, 1, 1) (0 \leq u \leq 1)$ とする。このとき

$$(4 \text{ 点 } O, P, Q, R \text{ が同一平面上}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{OR} = x\overrightarrow{OP} + y\overrightarrow{OQ} \text{ を満たす実数 } x, y \text{ が存在})$$

また

$$\overrightarrow{OR} = u\vec{a} + \vec{c} + \vec{d},$$

$$x\overrightarrow{OP} + y\overrightarrow{OQ} = x(s\vec{a} + \vec{d}) + y(t\vec{a} + \vec{c}) = (sx + ty)\vec{a} + y\vec{c} + x\vec{d}$$

$\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}$ は $\vec{0}$ でなく、互いに平行でなく、同一平面上にないことから

$$\begin{cases} u = sx + ty \\ 1 = y \\ 1 = x \end{cases}$$

すなわち、4 点 O, P, Q, R が同一平面上にあることから、 $x=1, y=1, u=s+t$ 。

$$\overrightarrow{OR} = (s+t)\vec{a} + \vec{c} + \vec{d} \quad \cdots (\text{答})$$

(2)

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = (s\vec{a} + \vec{d}) \cdot (t\vec{a} + \vec{c}) = st \quad \cdots (\text{答})$$

四角形 $OPQR$ は平行四辺形であることから

$$U = 2 \times \triangle OPQ$$

$$= \sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2 |\overrightarrow{OQ}|^2 - (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ})^2}$$

$$= \sqrt{(s^2 + 1)(t^2 + 1) - (st)^2}$$

$$= \sqrt{s^2 + t^2 + 1} \quad \cdots (\text{答})$$

(3)

$0 \leq u \leq 1$ かつ $u = s + t$ から、 $0 \leq s + t \leq 1$ 。

すなわち、 s, t の存在範囲は

$$0 \leq s \leq 1 \text{ かつ } 0 \leq t \leq 1 \text{ かつ } 0 \leq s + t \leq 1$$

この範囲における $s^2 + t^2$ の値域を考察する。

右図から

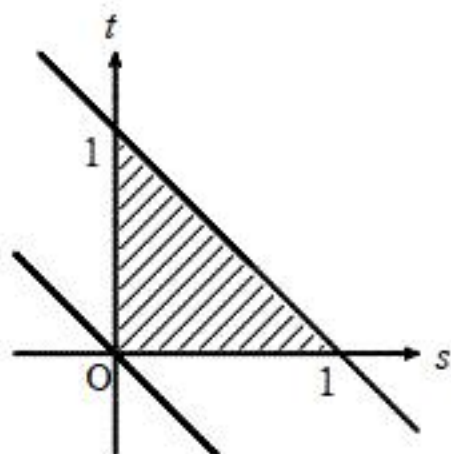
$$0 \leq s^2 + t^2 \leq 1^2$$

であることから、 U の最大値、最小値はそれぞれ

最大値は $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ 、 $(s, t) = (1, 0), (0, 1)$ のとき

最小値は $\sqrt{0+1} = 1$ 、 $(s, t) = (0, 0)$ のとき

である。 $\cdots (\text{答})$



$$(1) \quad Q(t) = P(t+1) = (t+1)^{2n} - n(t+1)^{n+1} + n(t+1)^{n-1} - 1$$

すなわち、2項展開により

$$(Q(t) \text{ の定数項}) = 1^{2n} - n \cdot 1^{n+1} + n \cdot 1^{n-1} - 1 = 0$$

$$(Q(t) \text{ の } t \text{ の係数}) = {}_{2n}C_1 - n \cdot {}_{n+1}C_1 + n \cdot {}_{n-1}C_1 = 2n - n(n+1) + n(n-1) = 0$$

また、 t^2 の係数について、 $n \geq 3$ のときは

$$\begin{aligned} (Q(t) \text{ の } t^2 \text{ の係数}) &= {}_{2n}C_2 - n \cdot {}_{n+1}C_2 + n \cdot {}_{n-1}C_2 \\ &= n(2n-1) - n \cdot \frac{(n+1)n}{2} + n \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} \\ &= n(2n-1) + \frac{n}{2}[(n-1)(n-2) - n(n+1)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

また、 $n=2$ のとき

$$(Q(t) \text{ の } t^2 \text{ の係数}) = {}_4C_2 - 2 \cdot {}_3C_2 = 6 - 6 = 0 \text{ である. (証明終)}$$

(2) $Q(t)$ の t^3 の係数を調べる. $n \geq 4$ のとき

$$\begin{aligned} (Q(t) \text{ の } t^3 \text{ の係数}) &= {}_{2n}C_3 - n \cdot {}_{n+1}C_3 + n \cdot {}_{n-1}C_3 \\ &= \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} - n \cdot \frac{(n+1)n(n-1)}{6} + n \cdot \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} \\ &= \frac{n}{6}[2(2n-1)(2n-2) - (n^3 - n) + (n^3 - 6n^2 + 11n - 6)] \\ &= \frac{1}{3}(n+1)n(n-1) \neq 0 \text{ である.} \end{aligned}$$

また、

$$n=2 \text{ のとき } (Q(t) \text{ の } t^3 \text{ の係数}) = {}_4C_3 - 2 \cdot {}_3C_3 = 4 - 2 = 2 \neq 0$$

$$n=3 \text{ のとき } (Q(t) \text{ の } t^3 \text{ の係数}) = {}_6C_3 - 3 \cdot {}_4C_3 = 20 - 12 = 8 \neq 0 \text{ である.}$$

以降、 $Q(t)$ の t^n の係数を a_n とする.

(1), (2) の考察より、 $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$, $a_{2n} = 1$ である.

このとき、 $Q(t) = \sum_{k=0}^{2n} a_k t^k$ と表される. $Q(t) = P(t+1)$ より、 $P(x) = Q(x-1)$ なので

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=0}^{2n} a_k (x-1)^k = (x-1)^{2n} + a_{2n-1}(x-1)^{2n-1} + \cdots + a_4(x-1)^4 + a_3(x-1)^3 \\ &= (x-1)^3[(x-1)^{2n-3} + a_{2n-1}(x-1)^{2n-4} + \cdots + a_4(x-1) + a_3] \end{aligned}$$

と表され、確かに $P(x)$ は $(x-1)^3$ で割り切れるが $(x-1)^4$ で割り切れない. (証明終)

(3)

$P(x) = 0$ が整数解 m を持つとすれば、 $P(m) = 0$ より

$$m^{2n} - nm^{n+1} + nm^{n-1} - 1 = 0$$

$$m(m^{2n-1} - nm^n + nm^{n-2}) = 1$$

$m^{2n-1} - nm^n + nm^{n-2}$ は $n \geq 2$ で整数なので、 $m = \pm 1$ のいずれかである.

$$P(1) = 1 - n + n - 1 = 0$$

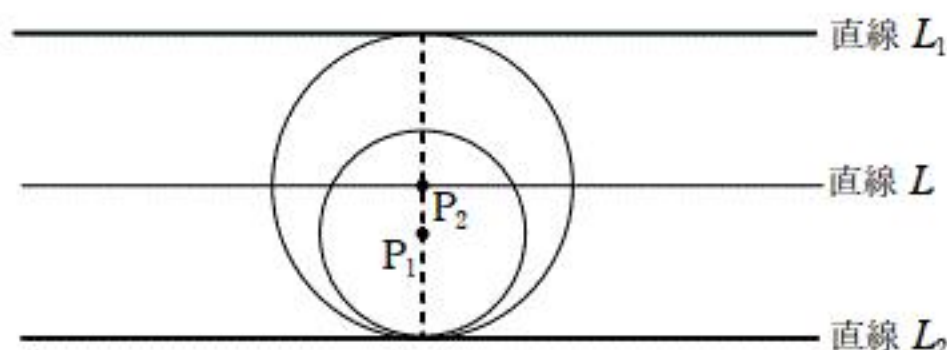
$$P(-1) = 1 - n \cdot (-1)^{n+1} + n(-1)^{n-1} - 1 = n \cdot (-1)^{n-1}[1 - (-1)^2] = 0$$

より、確かに $x = \pm 1$ はいずれも $P(x) = 0$ の解である. (証明終)

(1)

a, b のうち大きくない方を $\min[a, b]$ と表すこととする.

平行な 2 直線 L_1, L_2 と, 2 直線と同一平面上かつそれらの内側にある点 P との距離をそれぞれ D_1, D_2 とする. L_1, L_2 に垂直な直線を引き, それぞれとの交点を T_1, T_2 とするとき, $\min[D_1, D_2]$ を最大とする点 P の集合は, 線分 T_1T_2 の垂直 2 等分線 L 上全体である. 点 P が L 上にないとき, 点 P を L に近づけることで $\min[D_1, D_2]$ を大きくすることができることによる.

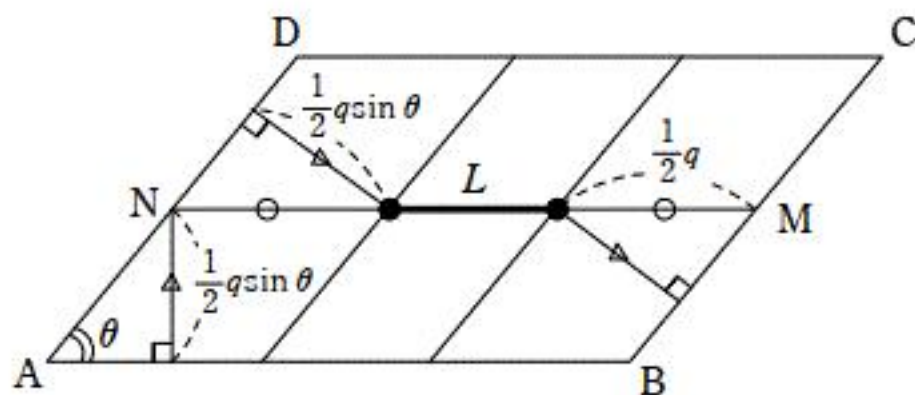


すなわち, 平行四辺形 $ABCD$ の内部の点 P と, 直線 AB, CD との距離を d_1, d_2 とすれば, $\min[d_1, d_2]$ を最大にする点 P の集合全体は, 辺 BC の中点 M , 辺 DA の中点 N を結ぶ線分 MN (点 M, N は除く) である. 直線 BC, AD についても同様に, それぞれへの距離の最小値を最大とする点 P の集合は, 辺 AB の中点 M' , 辺 CD の中点 N' を結ぶ線分 $M'N'$ (点 M', N' は除く) である.

ここで, 線分 MN と直線 AB までの距離は $\frac{1}{2}q\sin\theta$, 線分 $M'N'$ と直線 AD までの距離は $\frac{1}{2}p\sin\theta$ であり, $p > q$ より $\frac{1}{2}p\sin\theta > \frac{1}{2}q\sin\theta$ である. すなわち, 点 P の存在範囲は

線分 MN 上 かつ 辺 BC までの距離が $\frac{1}{2}q\sin\theta$ 以上 かつ 辺 AD までの距離が $\frac{1}{2}q\sin\theta$ 以上 を満たす部分全体である.

すなわち, 下図の太線部全体が軌跡 L である.



(2)

(1)より, 線分 L の長さは $p - 2 \times \frac{1}{2}q = p - q$. また, $R = \frac{1}{2}q\sin\theta$ である.

面積を求める領域は, 半径 R の円と辺の長さが $2R, p - q$ の長方形の和であり

$$S = \pi R^2 + 2R(p - q) = \frac{1}{4}\pi q^2 \sin^2\theta + (p - q)q\sin\theta \quad \cdots (\text{答})$$

(3)

$T = pq\sin\theta$ である. (2) とあわせて

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{S}{T} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \left(\frac{\pi q}{4p} \sin\theta + \frac{p - q}{p} \right) = \frac{p - q}{p} \quad \cdots (\text{答})$$

(1)

m, n を自然数として, C_b の回転の m 周期で C_a 上を n 周することで点 A と点 B が一致するとき,

$$2\pi a \times \frac{n}{m} = 2\pi b$$

$$\therefore na = mb \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで, $\gcd(a, b) = g$ とすれば, $a = a'g, b = b'g$ (a', b' は互いに素) と表されることから,

①は

$$na' = mb'$$

$$\therefore m = \frac{na'}{b'}$$

すなわち, m の値を最小の自然数とするのは, $n = b'$ のときであり

$$m = a' = \frac{a}{g} = \frac{a}{\gcd(a, b)} \quad \dots \text{(答)}$$

(2)

①と同様に考えて

$$n \cdot \frac{p}{q} = m \cdot \frac{s}{t}$$

$$ptn = qsm \quad \dots \textcircled{2}$$

ここで, $\gcd(p, s) = g_1, \gcd(q, t) = g_2$ とすれば, $p = p'g_1, s = s'g_1$ (p', s' は互いに素), $q = q'g_2, t = t'g_2$ (q', t' は互いに素) と表されることから, ②は

$$p't'n = q's'm$$

$$\therefore m = \frac{np't'}{q's'}$$

すなわち, m の値を最小の自然数とするのは, $n = q's'$ のときであり

$$m = p't' = \frac{pt}{g_1g_2} = \frac{pt}{\gcd(p, s) \cdot \gcd(q, t)} \quad \dots \text{(答)}$$

(3)

$\frac{2\pi b}{2\pi} = b$ から, C_b は 1 周期で初期位置の点 A から円 C_a 上を a 等分した点の b 個目まで移動する.

L を 0 以上の整数, $R_k = 1, 2, \dots, a-1$ として,

$2\pi kb = 2\pi a \times L + 2\pi \times R_k \iff kb = aL + R_k$ と表すとき, R_k の値は円 C_a 上の初期位置から R_k 個目の等分点に移動することを表す.

以上から, b の k 倍 ($k = 1, 2, \dots, a$) すなわち

$$b, 2b, 3b, \dots, ab$$

のそれぞれを a で割った余りが異なることを示せば十分である.

これを背理法により示す.

$1 \leq j < l \leq a$ として, jb, lb を a で割った余りが等しいとする. すなわち

$$jb = aK_1 + r, \quad lb = aK_2 + r$$

として, 辺々の差を取れば

$$(l-j)b = a(K_2 - K_1)$$

右辺は a の倍数だが, $1 \leq l-j \leq a-1$ と a, b が互いに素であることより, 等号は成り立たない. ゆえに, 余りが一致することはない.

以上より示した. (証明終)

(1)

$t = \sin x + \cos x$ の両方を 2 乗して, $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$ を得る. すなわち

$$f(x) = \frac{2t}{at^2 + 2 - a} \quad \dots \text{ (答)}$$

また, $t = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. x は実数全体を動くことから, t の変域は $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ $\dots$ (答)

(2)

$f(x) = g(t)$ とする.

$$g'(t) = 2 \cdot \frac{(at^2 + 2 - a) - t \cdot 2at}{(at^2 + 2 - a)^2} = \frac{-2(at^2 + a - 2)}{(at^2 + 2 - a)^2}$$

であり, $-2 < a < 2$ より (分母) $\neq 0$ に注意する.

分子の符号について, 曲線 $y = a(t^2 + 1)$, 直線 $y = 2$ の $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ における位置関係から考察される.

a) $-2 < a \leq \frac{2}{3}$ のとき

明らかに $g'(t) \geq 0$. すなわち, $g(t)$ は単調増加.

$$\text{最大値は } g(\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}}{a+2}, \quad \text{最小値は } g(-\sqrt{2}) = -\frac{2\sqrt{2}}{a+2}$$

b) $\frac{2}{3} < a < 2$ のとき

$t = \pm \sqrt{\frac{2}{a} - 1}$ で曲線 $y = a(t^2 + 1)$, 直線 $y = 2$ が交わりをもち, $g'(t)$ の符号を変える.

すなわち, $\sqrt{\frac{2}{a} - 1} = v$ とおくと, $g(t)$ の増減は次表.

t	$-\sqrt{2}$	$\dots$	$-v$	$\dots$	v	$\dots$	$\sqrt{2}$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$		$\searrow$	$g(-v)$	$\nearrow$	$g(v)$	$\searrow$	

また, $g(\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}}{a+2} > 0$, $g(-\sqrt{2}) = -\frac{2\sqrt{2}}{a+2} < 0$

$$g(v) = \frac{2v}{av^2 + 2 - a} = \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{2-a}{a}}}{a \cdot \frac{2-a}{a} + 2 - a} = \frac{1}{\sqrt{a(2-a)}}, \quad g(-v) = -\frac{1}{\sqrt{a(2-a)}}$$

より, 最大値は $\frac{1}{\sqrt{a(2-a)}}$, 最小値は $-\frac{1}{\sqrt{a(2-a)}}$. 以上より

$-2 < a \leq \frac{2}{3}$ のとき, 最大値 $\frac{2\sqrt{2}}{a+2}$, 最小値 $-\frac{2\sqrt{2}}{a+2}$

$\frac{2}{3} < a < 2$ のとき, 最大値 $\frac{1}{\sqrt{a(2-a)}}$, 最小値 $-\frac{1}{\sqrt{a(2-a)}}$ $\dots\dots$ (答)

(3) $u = \sin x - \cos x$ と置換する. $du = (\cos x + \sin x)dx$, $\sin x \cos x = \frac{1-u^2}{2}$, $u: -1 \rightarrow 1$.

すなわち $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{du}{1 + a \cdot \frac{1-u^2}{2}} = \int_{-1}^1 \frac{2}{-au^2 + a + 2} du$ であることから

I) $a = -1$ のとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{2}{u^2 + 1} du = 4 \int_0^1 \frac{du}{u^2 + 1} = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi \quad \dots \text{ (答)} \quad (u = \tan \theta \text{ と置換})$$

II) $a = 1$ のとき

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx &= \int_{-1}^1 \frac{2}{-u^2 + 3} du \\ &= 4 \int_0^1 \frac{du}{-u^2 + 3} \\ &= \frac{4}{2\sqrt{3}} \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{3}-u} + \frac{1}{\sqrt{3}+u} \right) du \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left[-\log|\sqrt{3}-u| + \log|\sqrt{3}+u| \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \log(2 + \sqrt{3}) \quad \dots \text{ (答)} \end{aligned}$$