

(1)

$$f(k) = k^2 \int_a^e x^2 dx - 2k \int_a^e x \log x dx + \int_a^e (\log x)^2 dx$$

である。

$$p = \int_a^e x^2 dx, q = \int_a^e x \log x dx, r = \int_a^e (\log x)^2 dx$$

とおくと,

$$p = \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^e = \frac{e^3 - a^3}{3} > 0$$

である。

$$f(k) = pk^2 - 2kq + r = p \left(k - \frac{q}{p} \right)^2 - \frac{q^2}{p} + r$$

なので, $k = \frac{q}{p}$ のとき $f(k)$ は最小となる。部分積分より,

$$\begin{aligned} q &= \left[\frac{x^2}{2} \log x \right]_a^e - \int_a^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \log x \right]_a^e - \left[\frac{x^2}{4} \right]_a^e \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{a^2}{2} \log a - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{a^2}{4} \right) \\ &= \frac{1}{4} (e^2 - 2a^2 \log a + a^2) \end{aligned}$$

なので,

$$k_0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{e^2 - 2a^2 \log a + a^2}{e^3 - a^3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad k_0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{e^2 - 2a^2 \log a + a^2}{e^3 - a^3}$$

(2)

$\log a \geq 1 - \frac{1}{a}$ なので, 両辺 0 以上の数 a^2 をかけて,

$$a^2 \log a \geq a^2 - a$$

また, $0 < a < e$ より, $\log a < 1$ なので,

$$a^2 \log a < a^2$$

である。この 2 つをあわせて,

$$a^2 - a \leq a^2 \log a < a^2$$

となる。極限を考えると,

$$\lim_{a \rightarrow +0} (a^2 - a) \leq \lim_{a \rightarrow +0} a^2 \log a \leq \lim_{a \rightarrow +0} a^2 \Leftrightarrow 0 \leq \lim_{a \rightarrow +0} a^2 \log a \leq 0$$

である。よって,

$$\lim_{a \rightarrow +0} a^2 \log a = 0$$

である。これを用いると,

$$\lim_{a \rightarrow +0} k_0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{e^2 - 2 \cdot 0 + 0}{e^3 - 0} = \frac{3}{4e}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3}{4e}$$

II

(1)

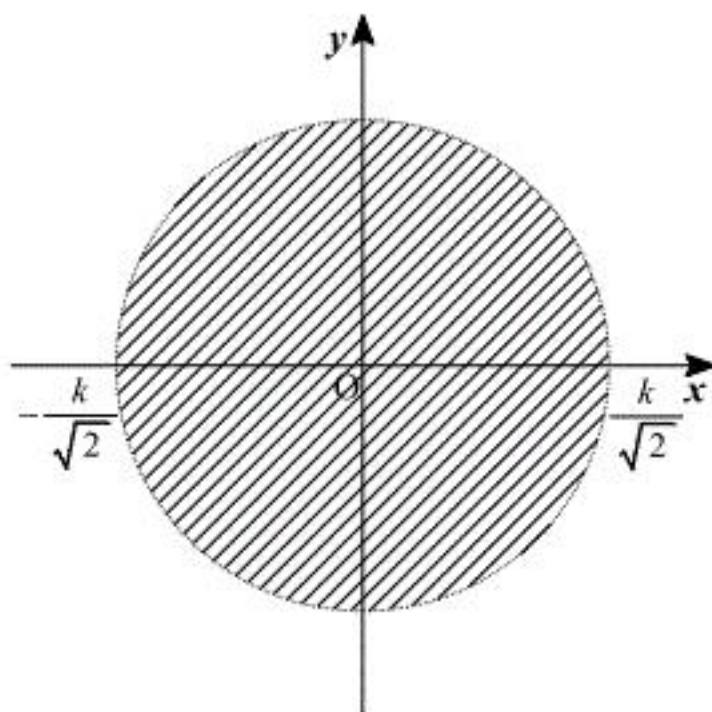
$0 < b = k - a$ なので, $a < k$ である。よって, $0 < a < k$ である。

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &< a^2 + b^2 \\ &= a^2 + (k - a)^2 \\ &= 2a^2 - 2ka + k^2 \\ &= 2\left(a - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{k^2}{2} \end{aligned}$$

である。右辺は $a = \frac{k}{2}$ のとき最小値 $\frac{k^2}{2}$ になるので, 求める (x, y) の満たす式は,

$$x^2 + y^2 < \frac{k^2}{2}$$

である。したがって次図の斜線部となる。(ただし境界は含まない。)



(答) 前図

(2)

$0 < xy < ab = a(k - a)$ である。

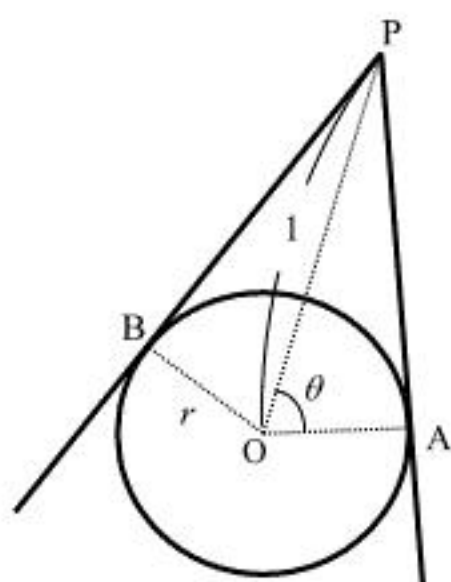
右辺は $a \rightarrow +0$ のとき $a(k - a) \rightarrow +0$ となるので, (x, y) の満たす式は,

$$0 < xy \leq 0$$

である。これは空集合を表すので, 点 (x, y) は存在しない。

(答) 存在しない

Ⅲ



$\angle AOP = \theta$ とおくと, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ である。

OP = 1 なので,

$$r = OA = \cos \theta$$

$$\sqrt{1-r^2} = PA = \sin \theta$$

となる。面積は,

$$(\text{四辺形 PAOB}) = 2(\text{直角三角形 AOP})$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

$$(\text{扇形 OAB}) = \frac{1}{2} r^2 (2\theta) = r^2 \theta = \theta \cos^2 \theta$$

なので,

$$T = \frac{1}{2} \sin 2\theta - \theta \cos^2 \theta$$

$$\frac{dT}{d\theta} = \cos 2\theta - \{\cos^2 \theta + \theta \cdot 2 \cos \theta (-\sin \theta)\}$$

$$= (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - \cos^2 \theta + 2\theta \cos \theta \sin \theta$$

$$= -\sin^2 \theta + 2\theta \cos \theta \sin \theta$$

$$= \cos \theta \sin \theta \left(\frac{-\sin \theta}{\cos \theta} + 2\theta \right)$$

$$= \cos \theta \sin \theta (-\tan \theta + 2\theta)$$

である。 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で $y = \tan \theta$ のグラフは下に凸なので, 直線 $y = 2\theta$ との共有点は最大

2 個であり, そのうち 1 つは原点である。

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ のとき } 2\theta > \tan \theta = \sqrt{3}$$

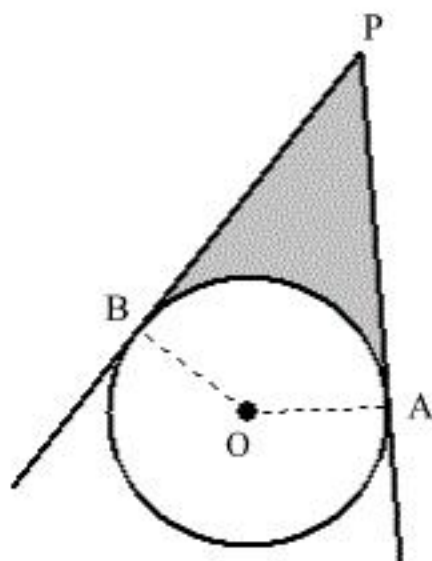
$$\theta = \frac{5}{12} \pi \text{ のとき } 2\theta < \tan \theta = 2 + \sqrt{3}$$

なので, もう 1 つが $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{5}{12} \pi$ にある。それを θ_0 とおくと, T の増減表は次のようになる。

θ	0	...	θ_0	...	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dT}{d\theta}$	0	+	0	-	-1
T	0	↗		↘	0

したがって, T が最大となる $\theta = \theta_0$ が唯一ある。 $r = \cos \theta$ は上の範囲で単射なので, T が最大となる $r_0 = \cos \theta_0$ も唯一ある。

(証明終)



T の周について直線部の長さは,

$$2 \sin \theta = 2 \sqrt{1-r_0^2}$$

であり, 円弧部の長さは,

$$r(2\theta_0) = \cos \theta_0 \tan \theta_0 = \sin \theta_0 = \sqrt{1-r_0^2}$$

となるので, 合計して T の周の長さは $3\sqrt{1-r_0^2}$ となる。

(答) $3\sqrt{1-r_0^2}$

IV

(1)

$$\left|\vec{u}\right|^2=1,\left|\vec{v}\right|^2=1,\left|\vec{w}\right|^2=1$$

である。また、これら 3 ベクトルが成す角はどれも $\frac{2}{3}\pi$ であることから、

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=-\frac{1}{2},\vec{v}\cdot\vec{w}=-\frac{1}{2},\vec{w}\cdot\vec{u}=-\frac{1}{2}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\left|\vec{x}\right|^2&=\frac{1}{n^2}\left|a\vec{x}+b\vec{v}+c\vec{w}\right|^2\\&=\frac{1}{n^2}\left(a^2\left|\vec{u}\right|^2+b^2\left|\vec{v}\right|^2+c^2\left|\vec{w}\right|^2+2ab\vec{u}\cdot\vec{v}+2bc\vec{v}\cdot\vec{w}+2ca\vec{w}\cdot\vec{u}\right)\\&=\frac{1}{n^2}\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)\\&=\frac{1}{n^2}\left\{\left(a+b+c\right)^2-3\left(ab+bc+ca\right)\right\}\\&=\frac{1}{n^2}\left(n^2-3t\right)\\&=1-\frac{3t}{n^2}\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \left|\vec{x}\right|^2=1-\frac{3t}{n^2}$$

(2)

場合は、(1 または 2)、(3 または 4)、(5 または 6) の 3 通りなので、 n 回繰り返すと 3^n 通りとなる。

指定された目の出方は、同じもののある順列の公式より $\frac{n!}{a!b!c!}$ 通りである。

よって、

$$p(a,b,c)=\frac{n!}{a!b!c!3^n}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad p(a,b,c)=\frac{n!}{a!b!c!3^n}$$

(3)

非負整数 a, b, c で $a+b+c=n$ を満たすもの全体にわたる和を $\sum_{(*)}$ で表すことにする。

問題のヒントより $\sum_{(*)}\frac{n!}{a!b!c!3^n}=1$ なので、

$$S_n=\sum_{(*)}\frac{1}{a!b!c!}=\frac{3^n}{n!}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad S_n=\frac{3^n}{n!}$$

(4)

非負整数 a, b, c で $a+b+c=n, a\geq 1, b\geq 1$ を満たすもの全体にわたる和を $\sum_{(**)}$ で表すことに

する。 ab の期待値は、期待値の定義より、

$$\begin{aligned}\sum_{(*)}ab\cdot p(a,b,c)&=\sum_{(**)}ab\cdot p(a,b,c)\\&=\sum_{(**)}ab\cdot\frac{n!}{a!b!c!3^n}\\&=\frac{n(n-1)}{9}\sum_{(**)}\frac{(n-2)!}{(a-1)!(b-1)!c!3^{n-2}}\\&=\frac{n(n-1)}{9}\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{n(n-1)}{9}$$

(5)

$\left|\vec{x}\right|^2$ の期待値 $E\left(\left|\vec{x}\right|^2\right)$ は、

$$\begin{aligned}E\left(1-3\frac{t}{n^2}\right)&=1-\frac{3}{n^2}E(t)\\&=1-\frac{3}{n^2}E(ab+bc+ca)\\&=1-\frac{3}{n^2}\{E(ab)+E(bc)+E(ca)\}\\&=1-\frac{9}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{9}\\&=1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{1}{n}\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{n}$$