

平成19年度

数学(その1)問題

I. a を $0 < a < e$ なる定数とするとき, k の関数

$$f(k) = \int_a^e (\log x - kx)^2 dx$$

を最小にするような k の値を k_0 とする. ただし, e は自然対数の底とし, $\log x$ は自然対数とする.

- (1) k_0 を a を用いて表せ.
- (2) $a \rightarrow +0$ としたときの k_0 の極限値を求めよ. ただし, $\log x \geq 1 - \frac{1}{x}$ が成立することは使ってよい.

II. k を正の定数とし, $a+b=k$, $a>0$, $b>0$ を満たす点 (a,b) の全体を S とする. (1),(2) 各々について, 次のような点 (x,y) が存在するときは, その範囲を求め, xy 平面上に図示せよ. 存在しないときは, その理由を述べよ.

- (1) 「任意の $(a,b) \in S$ について $x^2 + y^2 < a^2 + b^2$ が成立する」を満たす (x,y) .
- (2) 「任意の $(a,b) \in S$ について $0 < xy < ab$ が成立する」を満たす (x,y) .

III. 平面上に定点 P, O を, 距離 $\overline{PO}$ が1となるようにとり, O を中心とする半径 r ($r < 1$) の円を考える. P からこの円に2本の接線を引いたとき, その接点を A, B とし, 線分 PA, PB と円弧 AB の短い方で囲まれる領域を T とする. r を $0 < r < 1$ の範囲で動かすとき, T の面積を最大にするような r の値 r_0 がただひとつ存在することを示し, そのときの T の周の長さを r_0 を用いて表せ.

IV. 平面上に外接円の半径が1の正三角形 UVW がある. その外心を O とし, $\vec{u} = \overrightarrow{OU}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$, $\vec{w} = \overrightarrow{OW}$ とおく. 正しく作られたサイコロを n 回投げたとき, 「1または2が合わせて a 回, 3または4が合わせて b 回, 5または6が合わせて c 回出る確率」を $p(a,b,c)$ とし,

$$\vec{x} = \frac{1}{n}(a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w})$$

とおく. ただし, n は与えられた正の整数であり,

$$(*) \quad a, b, c \text{ は, } a + b + c = n \text{ を満たす } 0 \text{ または正の整数である}$$

とする.

- (1) $t = ab + bc + ca$ とおく. $|\vec{x}|^2$ を, n, t を用いて表せ.
- (2) $p(a,b,c)$ を求めよ.
- (3) 上記の条件 $(*)$ を満たすように a, b, c をくまなく動かしたときの $\frac{1}{a!b!c!}$ の和

$$S_n = \sum_{(*) \text{ を満たす } (a,b,c)} \frac{1}{a!b!c!}$$

を考える. たとえば, $n=2$ のときは,

$$S_2 = \frac{1}{2!0!0!} + \frac{1}{0!2!0!} + \frac{1}{0!0!2!} + \frac{1}{1!1!0!} + \frac{1}{1!0!1!} + \frac{1}{0!1!1!}$$

である. 条件 $(*)$ を満たすように a, b, c をくまなく動かしたときの $p(a,b,c)$ の和が1であること, すなわち

$$\sum_{(*) \text{ を満たす } (a,b,c)} p(a,b,c) = 1$$

が成り立つこと (このことは証明しないでよい) に注意して, S_n を n を用いて表せ.

- (4) ab の期待値を n を用いて表せ.
- (5) $|\vec{x}|^2$ の期待値を n を用いて表せ.