

$$[1] \quad a_{100} = \left[\frac{100}{3} \right] = \boxed{33} \dots 7$$

$$b_{100} = \left[\frac{100}{3} \right] + \left[\frac{100}{7} \right] - \left[\frac{100}{21} \right] = 33 + 14 - 4 = \boxed{43} \dots 1$$

$$\begin{aligned} S_{100} &= (3+6+\dots+99) + (7+14+\dots+98) - (21+42+\dots+84) \\ &= \frac{102 \times 33}{2} + \frac{105 \times 14}{2} - \frac{105 \times 4}{2} = 1683 + 735 - 210 \\ &= \boxed{2208} \dots 7 \end{aligned}$$

$$a_n = \left[\frac{n}{3} \right] \quad \text{ただし} \quad \frac{n}{3} - 1 < a_n \leq \frac{n}{3} \quad \therefore \frac{1}{3} - \frac{1}{n} < \frac{a_n}{n} \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{よ、2, は1より3 論法1により} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \boxed{\frac{1}{3}} \dots 7$$

$$e_n = \left[\frac{n}{3} \right] + \left[\frac{n}{7} \right] - \left[\frac{n}{21} \right] \quad \text{ただし} \quad \text{上と同様にして,}$$

$$\left(\frac{n}{3} - 1 \right) + \left(\frac{n}{7} - 1 \right) - \frac{n}{21} < e_n < \frac{n}{3} + \frac{n}{7} - \left(\frac{n}{21} - 1 \right)$$

$$\text{よ、2, は1より3 論法1により} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_n}{n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} - \frac{1}{21} = \frac{9}{21} = \boxed{\frac{3}{7}} \dots 7$$

$$\begin{aligned} n = 21m \text{ のとき} \quad S_n &= (3+6+\dots+21m) + (7+14+\dots+21m) \\ &\quad - (21+42+\dots+21m) \\ &= \frac{(3+21m)7m}{2} + \frac{(7+21m)3m}{2} - \frac{(21+21m)m}{2} \\ &= \frac{21m}{2} \{ (1+7m) + (1+3m) - (1+m) \} = \frac{21m}{2} (1+9m) \end{aligned}$$

$$21m \leq n < 21(m+1) \text{ のとき} \quad \frac{21m(1+9m)}{2} \leq S_n < \frac{21(m+1)}{2} \{1+9(m+1)\}$$

$$\text{ただし} \quad \frac{21m(1+9m)}{2 \{21(m+1)\}^c} \leq \frac{S_n}{n^c} < \frac{21(m+1)(9m+10)}{2(21m)^c} \quad \text{ただし}$$

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき} \quad m \rightarrow \infty \quad \text{ただし} \quad \text{2,}$$

$$c = 2 \text{ のとき} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^c} = \frac{3}{14}$$

$$c > 2 \text{ のとき} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^c} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2} \cdot \frac{1}{n^{c-2}} = 0$$

$$c < 2 \text{ のとき} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^c} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2} \cdot n^{2-c} = \infty$$

$$\text{よ、2} \quad c = \boxed{2} \dots 7 \quad \text{極限值は} \quad \boxed{\frac{3}{14}} \dots 7$$

[11]

$$(1) f(x) = (x^2 - 1)(x - 2) = x^3 - 2x^2 - x + 2 \quad \therefore f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$$

$$\therefore f'(x) = 0 \iff x = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3} \quad \dots\dots \left(\frac{9}{10}\right)$$

$$(2) \begin{array}{r|rrrr} 3 & -4 & -1 & & \\ \hline & 1 & -2 & -1 & 2 \\ & & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ \hline & & & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \\ & & & -\frac{1}{3} & \frac{8}{9} & \frac{2}{9} \\ \hline & & & & -\frac{14}{9} & \frac{16}{9} \end{array}$$

左の計算より、 $\hat{x}$ は

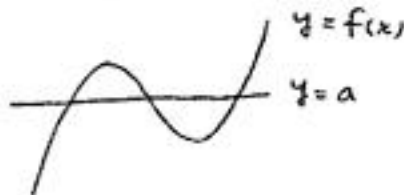
$$\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}, \quad \text{余りは} \\ -\frac{14}{9}x + \frac{16}{9} \quad \dots\dots \left(\frac{9}{10}\right)$$

$$(3) f(x) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}\right)f'(x) - \frac{14}{9}x + \frac{16}{9} \quad \text{左の2}$$

$$f\left(\frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}\right) = 0 - \frac{14}{9}\left(\frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}\right) + \frac{16}{9} = \frac{20 \mp 14\sqrt{7}}{27} \quad (\text{頑念同順})$$

増減表は次のようにたづ

x	$\dots$	$\frac{2-\sqrt{7}}{3}$	$\dots$	$\frac{2+\sqrt{7}}{3}$	$\dots$
f'	+	0	-	0	+
f	$\nearrow$	$\frac{20+14\sqrt{7}}{27}$	$\searrow$	$\frac{20-14\sqrt{7}}{27}$	$\nearrow$



$f(x) = a$ の異なる実数解の個数は、 $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = a$ の異なる交点数に等しい。よ、2

$$\frac{20-14\sqrt{7}}{27} < a < \frac{20+14\sqrt{7}}{27} \quad \dots\dots \left(\frac{9}{10}\right)$$

[III]

(1) f の定義より $Q(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}), \dots, (\frac{1}{2})$ g の定義より $R(X, Y) \text{ 且 } X < 2$

$$\left(\frac{X}{Y}\right) = t \left(\frac{X}{Y}\right) \quad (t > 0) \quad \text{かつ} \quad \sqrt{X^2 + Y^2} \sqrt{X^2 + Y^2} = 1 \quad \text{より} \quad t = \frac{1}{X^2 + Y^2}$$

$$\therefore \left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{1}{X^2 + Y^2} \left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{1}{4+9} \left(\frac{1}{2}\right), \quad R\left(\frac{1}{13}, \frac{2}{13}\right) \dots \dots (\frac{1}{2})$$

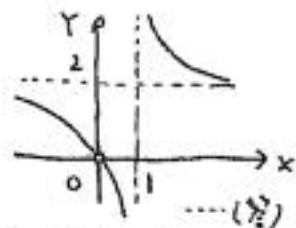
(2) f の不動点とは $\begin{cases} \frac{1}{x} = x \\ \frac{1}{y} = y \end{cases}$ より $(\pm 1, \pm 1)$ (特異点) $\dots (\frac{1}{2})$

g の不動点とは $\begin{cases} \frac{x}{x^2+y^2} = x \\ \frac{y}{x^2+y^2} = y \end{cases}$ より 円周 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点全て. $\dots (\frac{1}{2})$

$$(3) \begin{cases} X = \frac{1}{x} \\ Y = \frac{1}{y} \end{cases} \text{ より } \begin{cases} x = \frac{1}{X} \\ y = \frac{1}{Y} \end{cases} \text{ したがって代入して } \frac{1}{X} + \frac{2}{Y} = 1.$$

$$\therefore \frac{2}{Y} = 1 - \frac{1}{X} = \frac{X-1}{X} \quad \text{より} \quad Y = \frac{2X}{X-1} = 2 + \frac{2}{X-1}$$

$X \neq 0$ かつ $Y \neq 0$ に注意すると $\frac{1}{2}$ は右図
原点を除く.



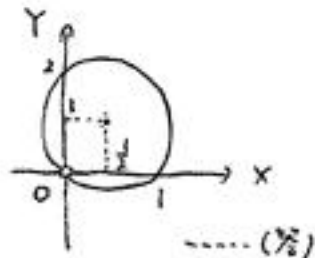
$$(4) \begin{cases} X = \frac{x}{x^2+y^2} \\ Y = \frac{y}{x^2+y^2} \end{cases} \text{ より } \begin{cases} x = \frac{X}{X^2+Y^2} \\ y = \frac{Y}{X^2+Y^2} \end{cases} \text{ したがって代入して}$$

$$\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{2y}{x^2+y^2} = 1, \quad \therefore x^2 + y^2 = x + 2y$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 = \frac{5}{4}$$

$(x, y) \neq (0, 0)$ に注意すると

$\frac{1}{2}$ は右図. 原点を除く.



[IV]

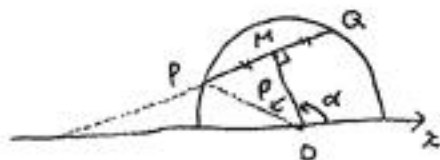
$$(1) \quad t = x - a \text{ と置換可 } \int_0^{b-a} t \{t - (b-a)\} dt = \left[\frac{t^2}{2} - (b-a) \frac{t^2}{2} \right]_0^{b-a}$$

$$= -\frac{1}{6} (b-a)^3 \dots (\frac{1}{6})$$

(2) 右図より, x 軸の正方向と

PQ の成す角は $\alpha - 90^\circ$

$$\therefore \text{傾き } \tan(\alpha - 90^\circ) = -\frac{1}{\tan \alpha} \dots (\frac{1}{6})$$



(3) P, Q の座標を $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ $x_1 < x_2$ とする

$$x_1 = \cos(\alpha + \beta) \quad x_2 = \cos(\alpha - \beta)$$

直線 PQ の式は $y = -\frac{1}{\tan \alpha} (x - x_1) + y_1$ と表せる

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} \left[(\sqrt{1-x^2})^2 - \left\{ -\frac{1}{\tan \alpha} (x - x_1) + y_1 \right\}^2 \right] dx$$

$$= -\pi \left(1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha} \right) \int_{x_1}^{x_2} (x - x_1)(x - x_2) dx$$

$$= \frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left\{ \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \right\}^3$$

$$= \frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha} (2 \sin \alpha \sin \beta)^3$$

$$= \frac{4}{3} \pi \sin \alpha \sin^3 \beta \dots \dots \dots (\frac{1}{6})$$

$$(4) \quad \beta \leq \alpha \leq \pi - \beta \quad \text{より} \quad \sin \beta \leq \sin \alpha \leq 1$$

$$\text{よって } V = \frac{4}{3} \pi (\sin^3 \beta - \sin^4 \beta)$$

$$u = \sin \beta \text{ とおくと } g(u) = u^3 - u^4 \text{ とおくと } V = \frac{4}{3} \pi g(u)$$

$$\text{よって } g'(u) = 3u^2 - 4u^3 = u^2(3 - 4u) \quad \text{とおく}$$

増減表は

u	$\dots$	0	$\dots$	$\frac{3}{4}$	$\dots$
g'	$+$	0	$+$	0	$-$
g	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$$\therefore u = \frac{3}{4} \text{ のとき最大}$$

$$\text{よって } W \text{ の最大値は } \frac{4}{3} \pi \text{ のとき } \sin \beta_0 = \frac{3}{4} \text{ のとき } \dots (\frac{1}{6})$$