

I

(1)

最小の自然数 n は $n = \boxed{3}$ ア

2^{12} を 7 で割った余りは $\boxed{1}$ イ

2^{2009} を 7 で割った余りは $\boxed{4}$ ウ

$2^{2^{2009}}$ を 7 で割った余りは $\boxed{4}$ エ

(2)

$a \leq 5$ となる確率は $\boxed{\frac{25}{36}}$ オ

$a \leq 4$ となる確率は $\boxed{\frac{4}{9}}$ カ

B が A に勝つ確率は $\boxed{\frac{55}{216}}$ キ

引き分けとなる確率は $\boxed{\frac{1}{6}}$ ク

(3)

$x_{2m+1} = \boxed{\frac{1}{2}} x_{2m}$ ケ

$\boxed{\frac{2}{3}} x_{2m+1} + \boxed{\frac{1}{3}}$ コ, サ

$x_{2m+2} = \boxed{\frac{1}{3}} x_{2m} + \boxed{\frac{1}{3}}$ シ, ス

$\lim_{m \rightarrow \infty} x_{2m} = \boxed{\frac{1}{2}}$ セ

$\lim_{m \rightarrow \infty} x_{2m+1} = \boxed{\frac{1}{4}}$ ソ

[II]

(1) $P(\cos \theta, \sin \theta, 0)$. …… [答]

$Q(0, |\sin \alpha| \cos(\theta + \alpha), |\sin \alpha| \sin(\theta + \alpha))$. …… [答]

$$\begin{aligned} (2) \quad l^2 &= \cos^2 \theta + \{\sin \theta - |\sin \alpha| \cos(\theta + \alpha)\}^2 + \{0 - |\sin \alpha| \sin(\theta + \alpha)\}^2 \\ &= 1 - 2 \sin \theta |\sin \alpha| \cos(\theta + \alpha) + |\sin \alpha|^2 = 1 + \sin^2 \alpha - |\sin \alpha| 2 \sin \theta \cos(\theta + \alpha) \\ &= 1 + \sin^2 \alpha - |\sin \alpha| [\sin\{\theta + (\theta + \alpha)\} + \sin\{\theta - (\theta + \alpha)\}] \\ &= 1 + \sin^2 \alpha - |\sin \alpha| \{\sin(2\theta + \alpha) + \sin(-\alpha)\} \\ &= 1 + \sin^2 \alpha + |\sin \alpha| \sin \alpha - |\sin \alpha| \sin(2\theta + \alpha). \quad \dots\dots [答] \end{aligned}$$

(3) $-1 \leq \sin(2\theta + \alpha) \leq 1$ より,

最小値 $m = 1 + \sin^2 \alpha + |\sin \alpha| \sin \alpha - |\sin \alpha|$. …… [答]

最大値 $M = 1 + \sin^2 \alpha + |\sin \alpha| \sin \alpha + |\sin \alpha|$. …… [答]

(4)

(a) $l \geq 0$ なので,

$$\begin{aligned} 1 \leq l \leq \sqrt{3} &\iff 1 \leq l^2 \leq 3 \iff 1 \leq m \text{ かつ } M \leq 3 \\ &\iff \begin{cases} 1 \leq 1 + \sin^2 \alpha + |\sin \alpha| \sin \alpha - |\sin \alpha| & \text{かつ} \\ 1 + \sin^2 \alpha + |\sin \alpha| \sin \alpha + |\sin \alpha| \leq 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 0 \leq \sin^2 \alpha + |\sin \alpha| \sin \alpha - |\sin \alpha| & \text{かつ} \\ \sin^2 \alpha + |\sin \alpha| \sin \alpha + |\sin \alpha| - 2 \leq 0 \end{cases} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(i) $\sin \alpha > 0$ のとき.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\iff \begin{cases} 0 \leq 2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha & \text{かつ} \\ 2 \sin^2 \alpha + \sin \alpha - 2 \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{2} \leq \sin \alpha & \text{かつ} \\ \frac{-1 - \sqrt{17}}{4} \leq \sin \alpha \leq \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \end{cases} \\ &\iff \frac{1}{2} \leq \sin \alpha \leq \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}. \end{aligned}$$

(ii) $\sin \alpha \leq 0$ のとき.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\iff 0 \leq \sin \alpha \text{ かつ } -\sin \alpha - 2 \leq 0 \\ &\iff 0 \leq \sin \alpha \text{ かつ } -2 \leq \sin \alpha \iff 0 \leq \sin \alpha. \end{aligned}$$

よって $\sin \alpha = 0$.

$$(i), (ii) \text{ より } \sin \alpha = 0, \quad \frac{1}{2} \leq \sin \alpha \leq \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}. \quad \dots\dots [答]$$

$$\begin{aligned} (b) \quad l \leq \frac{\sqrt{3}}{3} &\iff l^2 \leq \frac{1}{3} \iff m \leq \frac{1}{3} \iff 1 + \sin^2 \alpha + |\sin \alpha| \sin \alpha - |\sin \alpha| \leq \frac{1}{3} \\ &\iff \sin^2 \alpha + |\sin \alpha| \sin \alpha - |\sin \alpha| + \frac{2}{3} \leq 0. \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

(i) $\sin \alpha \geq 0$ のとき.

$$\begin{aligned} \textcircled{2} &\iff 2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha + \frac{2}{3} \leq 0 \iff 6 \sin^2 \alpha - 3 \sin \alpha + 2 \leq 0 \iff 6 \left(\sin \alpha - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{13}{8} \leq 0. \\ &\text{これは不成立.} \end{aligned}$$

(ii) $\sin \alpha < 0$ のとき.

$$\textcircled{2} \iff \sin \alpha + \frac{2}{3} \leq 0 \iff \sin \alpha \leq -\frac{2}{3}.$$

$$(i), (ii) \text{ より } \sin \alpha \leq -\frac{2}{3}. \quad \dots\dots [答]$$

(5)

(i) $\sin \alpha \geq 0$ のとき.

$$m = 0 \iff 1 + 2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha = 0 \iff 2 \left(\sin \alpha - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{7}{8} = 0. \text{ これは不成立.}$$

(ii) $\sin \alpha < 0$ のとき.

$$m = 0 \iff 1 + \sin \alpha = 0 \iff \sin \alpha = -1.$$

このとき $\cos \alpha = 0$ であることに注意して (2) 式に代入すると,

$$\begin{aligned} l^2 &= 1 - \sin(2\theta + \alpha) = 1 - (\sin 2\theta \cos \alpha + \cos 2\theta \sin \alpha) = 1 + \cos 2\theta = 1 + (2 \cos^2 \theta - 1) \\ &= 2 \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

よって, $l = \sqrt{2} |\cos \theta|$.

$$\frac{1}{2t} \int_{-t}^t l \, d\theta = \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \sqrt{2} |\cos \theta| \, d\theta = \frac{2\sqrt{2}}{2t} \int_0^t |\cos \theta| \, d\theta = \frac{\sqrt{2}}{t} \int_0^t |\cos \theta| \, d\theta. \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

n を自然数とし, $(n-1)\frac{\pi}{2} \leq t < n\frac{\pi}{2}$ とすると,

$$\frac{2}{n\pi} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{2}{(n-1)\pi}.$$

$$\text{また, } \int_0^{(n-1)\frac{\pi}{2}} |\cos \theta| \, d\theta \leq \int_0^t |\cos \theta| \, d\theta \leq \int_0^{n\frac{\pi}{2}} |\cos \theta| \, d\theta$$

$$\iff (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos \theta| \, d\theta \leq \int_0^t |\cos \theta| \, d\theta \leq n \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos \theta| \, d\theta$$

$$\iff (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta \leq \int_0^t |\cos \theta| \, d\theta \leq n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta$$

$$\iff (n-1) [\sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \leq \int_0^t |\cos \theta| \, d\theta \leq n [\sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\iff (n-1) \leq \int_0^t |\cos \theta| \, d\theta \leq n.$$

よって,

$$\frac{2(n-1)\sqrt{2}}{n\pi} \leq \textcircled{3} \leq \frac{2n\sqrt{2}}{(n-1)\pi}.$$

$$\text{各辺に } \lim_{n \rightarrow \infty} \text{ を付けて, } \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \leq (\text{与式}) \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

$$(\text{与式}) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}. \quad \dots\dots [答]$$

補足 横 $\frac{\pi}{2}$, 縦 $\sqrt{2}$ の長方形の面積 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} \, d\theta$ の値は $\sqrt{2} \frac{\pi}{2}$ である.

横 $\frac{\pi}{2}$, 縦 $\sqrt{2} |\cos t|$ のサインカーブの面積 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} |\cos t| \, d\theta$ の値は $\sqrt{2}$ である.

これは, 長方形の場合の $\frac{2}{\pi}$ 倍である.

区間を伸ばしても, およそ $\frac{2}{\pi}$ 倍になるであろうから,

$$\int_{-t}^t \sqrt{2} |\cos t| \, d\theta \div \frac{2}{\pi} \int_{-t}^t \sqrt{2} \, d\theta = \frac{2}{\pi} \sqrt{2} (2t) \text{ と概算できる. } 2t \text{ で割ると,}$$

$$\frac{1}{2t} \int_{-t}^t \sqrt{2} |\cos t| \, d\theta \div \frac{2}{\pi} \sqrt{2} \text{ となる.}$$

極限では, 誤差は 0 に収束するので, 答えを簡単に得ることができる.

【III】

(1) C_a 上の点を (x, y) とおく.

放物線の定義より, 原点 と (x, y) の距離は (x, y) と $y = a$ の距離に等しい.

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |a - y| \iff x^2 + y^2 = (a - y)^2 \iff x^2 = a^2 - 2ay. \text{ よって,}$$

$$C_a: y = -\frac{x^2}{2a} + \frac{a}{2}.$$

a を $-b$ に置き換えて,

$$C_{-b}: y = \frac{x^2}{2b} - \frac{b}{2}.$$

この2式を連立して,

$$P_{a,-b}(\sqrt{ab}, \frac{a-b}{2}). \dots\dots\dots \text{【答】}$$

(2) $\frac{1}{6}$ 公式より, D_a と D_{-b} で囲まれた部分の面積は,

$$\frac{1}{6} \left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} \right) (2\sqrt{ab})^3 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) (\sqrt{ab})^3 = \frac{2}{3}(a+b)\sqrt{ab} \text{ である.}$$

求める面積は, これの半分なので,

$$\frac{1}{3}(a+b)\sqrt{ab}. \dots\dots\dots \text{【答】}$$

(3) 前小問で求めた面積を $S_{a,-b}$ とおく.

$$\begin{aligned} S(a, b, r) &= S_{a+r, -(b+r)} - S_{a+r, -(b-r)} - S_{a-r, -(b+r)} + S_{a-r, -(b-r)} \\ &= \frac{1}{3} \{ (a+r) + (b+r) \} \sqrt{(a+r)(b+r)} - \frac{1}{3} \{ (a-r) + (b+r) \} \sqrt{(a-r)(b+r)} \\ &\quad - \frac{1}{3} \{ (a+r) + (b-r) \} \sqrt{(a+r)(b-r)} + \frac{1}{3} \{ (a-r) + (b-r) \} \sqrt{(a-r)(b-r)} \\ &= \frac{1}{3} (a+r)^{\frac{3}{2}} (\sqrt{b+r} - \sqrt{b-r}) - \frac{1}{3} (a-r)^{\frac{3}{2}} (\sqrt{b+r} - \sqrt{b-r}) \\ &\quad + \frac{1}{3} (b+r)^{\frac{3}{2}} (\sqrt{a+r} - \sqrt{a-r}) - \frac{1}{3} (b-r)^{\frac{3}{2}} (\sqrt{a+r} - \sqrt{a-r}) \\ &= \frac{1}{3} \{ (a+r)^{\frac{3}{2}} - (a-r)^{\frac{3}{2}} \} (\sqrt{b+r} - \sqrt{b-r}) + \frac{1}{3} \{ (b+r)^{\frac{3}{2}} - (b-r)^{\frac{3}{2}} \} (\sqrt{a+r} - \sqrt{a-r}) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{(a+r)^3 - (a-r)^3}{(a+r)^{\frac{3}{2}} + (a-r)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{2r}{\sqrt{b+r} + \sqrt{b-r}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{(b+r)^3 - (b-r)^3}{(b+r)^{\frac{3}{2}} + (b-r)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{2r}{\sqrt{a+r} + \sqrt{a-r}} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{6a^2r + 2r^3}{(a+r)^{\frac{3}{2}} + (a-r)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{2r}{\sqrt{b+r} + \sqrt{b-r}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6b^2r + 2r^3}{(b+r)^{\frac{3}{2}} + (b-r)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{2r}{\sqrt{a+r} + \sqrt{a-r}} \\ &= \frac{4r^2}{3} \left\{ \frac{3a^2 + r^2}{(a+r)^{\frac{3}{2}} + (a-r)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{b+r} + \sqrt{b-r}} + \frac{3b^2 + r^2}{(b+r)^{\frac{3}{2}} + (b-r)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a+r} + \sqrt{a-r}} \right\}. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} f(a, b) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^2} S(a, b, r) = \frac{4}{3} \left\{ \frac{3a^2}{2a^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{b}} + \frac{3b^2}{2b^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}} \right\} = \frac{a^2}{a^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{b^2}{b^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \\ &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \frac{a+b}{\sqrt{ab}}. \dots\dots\dots \text{【答】} \end{aligned}$$

補足 xy -平面上での微小面積を $dxdy$ とおく.

a, b が微小量 da, db だけ動くと, 次の式が成り立つことが知られている.

$$dxdy = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} \end{pmatrix} \right| dadb = \left| \frac{\partial x}{\partial a} \cdot \frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b} \cdot \frac{\partial y}{\partial a} \right| dadb.$$

ここで, $\frac{\partial x}{\partial a}$ は b を定数と思って x を a で微分したもの. 他も同様である.

本問は, $P_{a,-b}(x, y) = (\sqrt{ab}, \frac{a-b}{2})$ で, $da = 2r, db = 2r$ の場合なので,

$$dxdy = \left| \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}} \left(-\frac{1}{2} \right) - \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{b}} \left(\frac{1}{2} \right) \right| dadb = \frac{a+b}{4\sqrt{ab}} (2r)(2r) = \frac{a+b}{\sqrt{ab}} r^2.$$

大学1年生の微積で習う公式を用いると, このように, 1行で答えが出る.

(4) $P_{a,-b}(x, y)$ とおくと, $x = \sqrt{ab}, y = \frac{a-b}{2}$ であった.

$$f(a, b) < 4 \iff \frac{a+b}{\sqrt{ab}} < 4 \iff a+b < 4\sqrt{ab} \iff (a+b)^2 < 16ab \iff (a-b)^2 < 12ab$$

$$\iff \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 < 3ab \iff y^2 < 3x^2 \iff |y| < \sqrt{3}|x|.$$

$x > 0$ に注意して $|y| < \sqrt{3}x \iff -\sqrt{3}x < y < \sqrt{3}x$.

