

〔Ⅱ〕

問 1

 $a=1$ のとき

$$\int_1^x f(y)dy - x^2 - 6x + b = \int_0^1 (x^3 + x^2 y) f(y) dy$$

$$\iff \int_1^x f(y)dy - x^2 - 6x + b = x^3 \int_0^1 f(y)dy + x^2 \int_0^1 y f(y)dy \quad \dots\dots ①$$

$$\text{ここで, } \begin{cases} A = \int_0^1 f(y)dy \\ B = \int_0^1 y f(y)dy \end{cases} \quad \text{とおく.}$$

①は,

$$\int_1^x f(y)dy - x^2 - 6x + b = Ax^3 + Bx^2 \quad \dots\dots ②$$

と表せる. ②の辺々を x で微分すると,

$$f(x) - 2x - 6 = 3Ax^2 + 2Bx$$

$$\iff f(x) = 3Ax^2 + 2(B+1)x + 6 \quad \dots\dots ③$$

②において $x=1$ を代入すると,

$$-1 - 6 + b = A + B$$

$$\iff A + B = b - 7 \quad \dots\dots ④$$

ここで, ③を用いて,

$$A = \int_0^1 \{3Ay^2 + 2(B+1)y + 6\} dy$$

$$= A + (B+1) + 6 \quad \therefore B = -7$$

$$B = \int_0^1 \{3Ay^3 + 2(B+1)y^2 + 6y\} dy$$

$$= \frac{3}{4}A + \frac{2}{3}(B+1) + 3 \quad \therefore A = -8$$

以上を④に代入し, $-7 - 8 = b - 7 \quad \therefore b = -8$

$$\underline{\int_0^1 f(y)dy = -8, \int_0^1 y f(y)dy = -7, b = -8 \quad \dots\dots(\text{答})}$$

問 2

 $b=0$ のとき

$$\int_a^x f(y)dy - x^2 - 6x = x^3 \int_0^a f(y)dy + x^2 \int_0^a y f(y)dy \quad \dots\dots ⑤$$

$$\text{ここで, } \begin{cases} A' = \int_0^a f(y)dy \\ B' = \int_0^a y f(y)dy \end{cases} \quad \text{とおく.}$$

⑤は

$$\int_a^x f(y)dy - x^2 - 6x = A'x^3 + B'x^2 \quad \dots\dots ⑥$$

と, 表せる. ⑥の辺々を x で微分すると,

$$f(x) - 2x - 6 = 3A'x^2 + 2B'x$$

$$\iff f(x) = 3A'x^2 + 2(B'+1)x + 6 \quad \dots\dots ⑦$$

ここで, ⑦を用いて,

$$A' = \int_0^a \{3A'y^2 + 2(B'+1)y + 6\} dy$$

$$= A'a^3 + (B'+1)a^2 + 6a$$

$$B' = \int_0^a \{3A'y^3 + 2(B'+1)y^2 + 6y\} dy$$

$$= \frac{3}{4}A'a^4 + \frac{2}{3}(B'+1)a^3 + 3a^2$$

次に, ⑥に $x=0$ を代入すると,

$$\int_a^0 f(y)dy = 0 \iff -\int_0^a f(y)dy = 0 \quad \therefore A' = 0$$

$$\text{これより, } \begin{cases} (B'+1)a^2 + 6a = 0 \\ \frac{2}{3}(B'+1)a^3 + 3a^2 = B' \end{cases}$$

$$B' = -a^2, a(a-2)(a^2+2a+3) = 0$$

$$\therefore \begin{cases} a=0 \\ B'=0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} a=2 \\ B'=-4 \end{cases}$$

以上より,

$$\underline{f(x) = 2x + 6 \quad (a=0), f(x) = -6x + 6 \quad (a=2) \quad \dots\dots(\text{答})}$$

問 3

$$\int_a^x f(y)dy - x^2 - 6x + b = x^3 \int_0^a f(y)dy + x^2 \int_0^a y f(y)dy \quad \dots\dots ⑧$$

$$\text{ここで, } \begin{cases} A'' = \int_0^a f(y)dy \\ B'' = \int_0^a y f(y)dy \end{cases} \quad \text{とおく.}$$

よって⑧は,

$$\int_a^x f(y)dy - x^2 - 6x + b = A''x^3 + B''x^2 \quad \dots\dots ⑨$$

となる. また,

「 $f(x)$ と b がただ 1 組存在する」 $\iff$ 「定数 A'', B'' が 1 組に決まる」であることから, ⑨の辺々を x で微分すると

$$f(x) - 2x - 6 = 3A''x^2 + 2B''x$$

$$\iff f(x) = 3A''x^2 + 2(B''+1)x + 6 \quad \dots\dots ⑩$$

ここで⑩を用いて,

$$\begin{cases} A'' = \int_0^a \{3A''y^2 + 2(B''+1)y + 6\} dy = A''a^3 + (B''+1)a^2 + 6a \\ B'' = \int_0^a \{3A''y^3 + 2(B''+1)y^2 + 6y\} dy = \frac{3}{4}A''a^4 + \frac{2}{3}(B''+1)a^3 + 3a^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (a^3-1)A'' + a^2B'' = -a^2 - 6a \\ \frac{3}{4}a^4A'' + \left(\frac{2}{3}a^3-1\right)B'' = -\frac{2}{3}a^3 - 3a^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a^3-1 & a^2 \\ \frac{3}{4}a^4 & \frac{2}{3}a^3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'' \\ B'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^2-6a \\ -\frac{2}{3}a^3-3a^2 \end{pmatrix} \quad \dots\dots ⑪$$

$$\text{行列 } \begin{pmatrix} a^3-1 & a^2 \\ \frac{3}{4}a^4 & \frac{2}{3}a^3-1 \end{pmatrix} \text{ を } D \text{ とする.}$$

 (A'', B'') が 1 組に決まるためには

$$\det D = (a^3-1)\left(\frac{2}{3}a^3-1\right) - a^2 \cdot \frac{3}{4}a^4$$

$$= -\frac{1}{12}a^6 - \frac{5}{3}a^3 + 1 \neq 0$$

$$\iff a^6 + 20a^3 - 12 \neq 0$$

$$\iff (a^3)^2 + 20a^3 - 12 \neq 0 \quad \therefore \underline{a^3 \neq -10 \pm 4\sqrt{7}} \quad \dots\dots(\text{答})$$

〔Ⅲ〕

問 1

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}, AP = \sqrt{(x-a)^2 + (y-1)^2} \text{ より,}$$

$$OP - AP = 1$$

$$\iff \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-1)^2} + 1 \quad \dots\dots ①$$

①の辺々を2乗して,

$$x^2 + y^2 = (x-a)^2 + (y-1)^2 + 1 + 2\sqrt{(x-a)^2 + (y-1)^2}$$

$$\iff 2ax + 2y - a^2 - 2 = 2\sqrt{(x-a)^2 + (y-1)^2} \quad \dots\dots ②$$

$$\text{②より, } \begin{cases} 2ax + 2y - a^2 - 2 \geq 0 \\ (2ax + 2y - a^2 - 2)^2 = 4\{(x-a)^2 + (y-1)^2\} \end{cases}$$

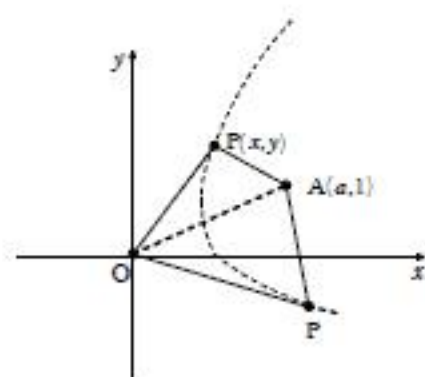
$$\iff \begin{cases} a(2x-a) \geq 2(1-y) \quad \dots\dots ③ \\ 4(a^2-1)x^2 - 4a^3x + 4a(2x-a)y + a^4 = 0 \quad \dots\dots ④ \end{cases}$$

ここで, ③より, $2x-a \leq 0$ とすると, $y \geq 1$ となり矛盾. ($y < 1$ も存在するから)

これより, $2x-a > 0$ と考えてよい.

④より,

$$y = \frac{4(a^2-1)x^2 - 4a^3x + a^4}{4a(a-2x)}, \quad x > \frac{a}{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$



問 2

$$t = \frac{a}{x} \quad (a = tx) \text{ とおくと,}$$

$$y = \frac{4(t^2x^2 - 1)x^2 - 4t^3x^3 \cdot x + t^4x^4}{4tx(tx - 2x)}$$

$$= \frac{4(t^2x^2 - 1) - 4t^3x^2 + t^4x^2}{4t(t-2)}$$

$$= \frac{t^2(t-2)^2x^2 - 4}{4t(t-2)} \quad \left(x > \frac{a}{2} \text{ より } 0 < t < 2 \right) \quad \dots\dots(\text{答})$$

問 3

$$s = t(t-2) \text{ とおくと,}$$

$$y = f(s) = \frac{x^2s^2 - 4}{4s} \quad (-1 \leq s < 0)$$

$$\begin{aligned} f'(s) &= \frac{2x^2s \cdot s - (x^2s^2 - 4) \cdot 1}{4s^2} \\ &= \frac{x^2s^2 + 4}{4s^2} > 0 \end{aligned}$$

よって, $y = f(s)$ は単調増加であることがわかる.

$$\begin{cases} \lim_{s \rightarrow -\infty} f(s) = +\infty \\ f(-1) = 1 - \frac{x^2}{4} \end{cases}$$

s	-1	...	(0)
f'(s)		+	
f(s)	$1 - \frac{x^2}{4}$	↗	(+\infty)

増減表より, $f(s) \geq 1 - \frac{x^2}{4}$ つまり, $y \geq 1 - \frac{x^2}{4}$ (ただし, $x > 0$)

図示すると, 右図の斜線部分となる.

ただし, y 軸上 ($x=0$) は境界を含まず,

$y = 1 - \frac{x^2}{4}$ ($x > 0$) は境界を含む.

