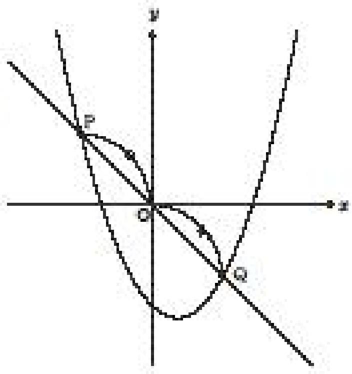
〔Ⅰ〕

問1　$P(p, p^2-p-2), Q(q, q^2-q-2)$　（ただし，$p<q$）とおく．

（a）　2点P, Qの中点は原点O(0, 0)より，

$$\begin{cases}\dfrac{p+q}{2}=0\\ \dfrac{(p^2-p-2)+(q^2-q-2)}{2}=0\end{cases} \iff \begin{cases}p+q=0\\ pq=-2\end{cases}$$



pとqを2解にもつxの2次方程式$x^2-2=0$を解いて，

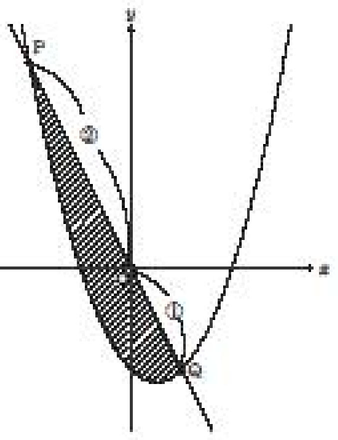
$$x=\pm\sqrt{2}$$

$$\therefore\ P\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right), Q\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$$

$$\therefore\ \underline{(\text{直線PQの方程式})\ y=-x}$$

（b）　2点P, Qを2：1に内分する点が原点O(0, 0)より，

$$\begin{cases}\dfrac{p+2q}{3}=0\\ \dfrac{(p^2-p-2)+2(q^2-q-2)}{3}=0\end{cases} \iff \begin{cases}p+2q=0\\ p^2+2q^2=6\end{cases}$$



これより，$p=-2, q=1$

$$\therefore\ P(-2, 4), Q(1, -2)$$

$$\therefore\ \underline{(\text{直線PQの方程式})\ y=-2x}$$

（c）　（b）の結果を用いて，求める面積Sは，

$$S=\int_{-2}^{1}\left\{-2x-(x^2-x-2)\right\}dx$$

$$=-\int_{-2}^{1}(x+2)(x-1)dx$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 3^3=\frac{9}{2} \qquad \therefore\ \underline{S=\frac{9}{2}}$$

問2

（a）　整数jを$1\leqq j\leqq n$で固定すると，

$(j, 1), (j, 2), (j, 3), \cdots\cdots, (j, n)$の$n$組の場合

$$(\text{和})=j\times 1+j\times 2+j\times 3+\cdots\cdots+j\times n$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}j$$

次に，整数jを$1\leqq j\leqq n$まで変化させて和をとると，

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{n(n+1)}{2}j=\frac{n(n+1)}{2}\sum_{j=1}^{n}j=\underline{\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2}$$

（b）　整数kを$2\leqq k\leqq n$で固定すると，$j=1, 2, 3, \cdots, k-1$となり，

$$(\text{和})=1\times k+2\times k+3\times k+\cdots\cdots+(k-1)\times k$$

$$=\frac{(k-1)k}{2}\cdot k=\frac{(k-1)k^2}{2} \quad \left(\begin{array}{l}k=1\text{のときは，(和)}=0\text{となり，題意を}\\ \text{満たすので，}1\leqq k\leqq n\text{と考えてよい}\end{array}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)k^2}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^3-k^2)=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

$$=\underline{\frac{n}{24}(n+1)(n-1)(3n+2)}$$

（c）　整数kを$3\leqq k\leqq n$で固定すると，$j=1, 2, 3, \cdots, k-2$となり，

$$(\text{和})=1\times k+2\times k+3\times k+\cdots\cdots+(k-2)\times k$$

$$=\frac{(k-2)(k-1)}{2}\cdot k=\frac{k^3-3k^2+2k}{2} \quad \left(\begin{array}{l}k=1, 2\text{のときは，(和)}=0\text{となり，題意を}\\ \text{満たすので，}1\leqq k\leqq n\text{と考えてよい}\end{array}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3-3k^2+2k}{2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2-\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)+\frac{n}{2}(n+1)$$

$$=\underline{\frac{n}{8}(n+1)(n-1)(n-2)}$$

問3

（a）

$$f'(x)=3x^2-6$$

$$=3\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$$

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$4\sqrt{2}$	↘	$-4\sqrt{2}$ (極小)	↗

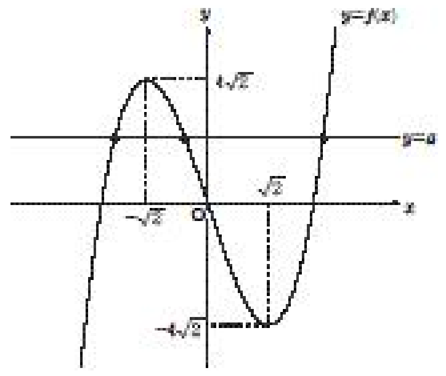
$\therefore\ \underline{x=\sqrt{2}}$　で$f(x)$は最小値をとる．

（b）　$f(x)$が奇関数であることに注意して

グラフを描くと右図の通り．

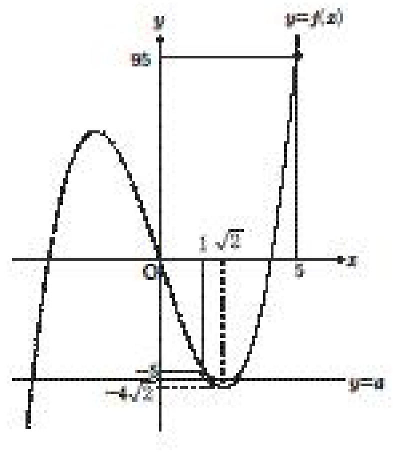
$f(x)=a$を2関数$\begin{cases}y=f(x)\\ y=a\end{cases}$に分離して

調べると，$\underline{-4\sqrt{2}\leqq a\leqq 4\sqrt{2}}$



（c）（b）と同様に考える．

$\therefore\ \underline{-4\sqrt{2}<a\leqq -5}$



〔Ⅱ〕

問１　$A_k\left(\cos\left(-\frac{\alpha}{2}+k\alpha\right),\ \sin\left(-\frac{\alpha}{2}+k\alpha\right)\right)$, $A_{k+1}\left(\cos\left(-\frac{\alpha}{2}+(k+1)\alpha\right),\ \sin\left(-\frac{\alpha}{2}+(k+1)\alpha\right)\right)$

より，

$$\overrightarrow{A_kA_{k+1}}=\left(\cos\left(-\frac{\alpha}{2}+(k+1)\alpha\right)-\cos\left(-\frac{\alpha}{2}+k\alpha\right),\ \sin\left(-\frac{\alpha}{2}+(k+1)\alpha\right)-\sin\left(-\frac{\alpha}{2}+k\alpha\right)\right)$$

$$=\left(-2\sin k\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2},\ 2\cos k\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=\underbrace{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\left(k\alpha+\frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(k\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right)}_{r(\cos\theta_k,\ \sin\theta_k)}$$

これより，$\underline{r=2\sin\frac{\alpha}{2}}$，$\theta_k=k\alpha+\frac{\pi}{2}$　$(k=0,1,2,\cdots)$

$$\therefore\ \underline{\theta_0=\frac{\pi}{2},\ \theta_1=\alpha+\frac{\pi}{2},\ \theta_2=2\alpha+\frac{\pi}{2}}$$

問２　上の結果を用いて，

$$\overrightarrow{OA_0}+\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_0A_1}+\cdots\cdots+\overrightarrow{A_nA_{n+1}}=\overrightarrow{OA_{n+1}}$$

$$\Longleftrightarrow\ \sum_{k=0}^{n}\overrightarrow{A_kA_{k+1}}=\overrightarrow{OA_{n+1}}-\overrightarrow{OA_0}$$

$$\Longleftrightarrow\ 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(-\sum_{k=0}^{n}\sin k\alpha,\ \sum_{k=0}^{n}\cos k\alpha\right)$$

$$=\left(\cos\left(-\frac{\alpha}{2}+(n+1)\alpha\right)-\cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right),\ \sin\left(-\frac{\alpha}{2}+(n+1)\alpha\right)-\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

$$\therefore\ \underline{\sum_{k=0}^{n}\cos k\alpha=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}},\ \sum_{k=0}^{n}\sin k\alpha=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}}$$

問３　問２より，

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin k\alpha=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ だから，

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin 2k\alpha=\frac{\cos\alpha-\cos(2n+1)\alpha}{2\sin\alpha}$ となる。

よって，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos k\alpha\sin k\alpha=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sin 2k\alpha=\underline{\frac{\cos\alpha-\cos(2n+1)\alpha}{4\sin\alpha}}$

問４

$$(\alpha\cos k\alpha+\sin k\alpha)^2=\alpha^2\cos^2 k\alpha+\sin^2 k\alpha+2\alpha\cos k\alpha\sin k\alpha$$

$$=(\alpha^2-1)\cos^2 k\alpha+\alpha\sin 2k\alpha+1$$

$$=(\alpha^2-1)\cdot\frac{1+\cos 2k\alpha}{2}+\alpha\sin 2k\alpha+1$$

$$=\frac{\alpha^2-1}{2}\cos 2k\alpha+\alpha\sin 2k\alpha+\frac{\alpha^2+1}{2}$$

$$\therefore\ \sum_{k=0}^{n}(\alpha\cos k\alpha+\sin k\alpha)^2=\frac{\alpha^2-1}{2}\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\cos 2k\alpha}_{\frac{\sin(2n+1)\alpha+\sin\alpha}{2\sin\alpha}}+\alpha\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\sin 2k\alpha}_{\text{(問3の利用)}}+\frac{\alpha^2+1}{2}(n+1)$$

$$=\frac{\alpha^2-1}{2}\cdot\frac{\sin(2n+1)\alpha+\sin\alpha}{2\sin\alpha}+\alpha\cdot\frac{\cos\alpha-\cos(2n+1)\alpha}{2\sin\alpha}+\underbrace{\frac{\alpha^2+1}{2}(n+1)}_{\text{※ここだけ注目すればよい}}$$

$-1\leqq\sin(2n+1)\alpha\leqq1,\ -1\leqq\cos(2n+1)\alpha\leqq1$ だから，$\frac{\alpha^2+1}{2}(n+1)$ だけ考えればよい。

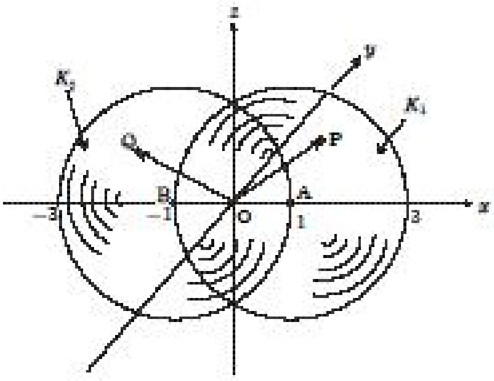
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(\alpha\cos k\alpha+\sin k\alpha)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{\alpha^2+1}{2}(n+1)$$

$$=\underline{\frac{\alpha^2+1}{2}}$$

〔Ⅲ〕

問1

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$$
$$=(1,0,0)+\overrightarrow{AP}\quad\left(\text{ただし，}\left|\overrightarrow{AP}\right|\leqq 2\right)$$
$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BQ}$$
$$=(-1,0,0)+\overrightarrow{BQ}\quad\left(\text{ただし，}\left|\overrightarrow{BQ}\right|\leqq 2\right)$$



これより，

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$$
$$=(1,0,0)+\overrightarrow{AP}+(-1,0,0)+\overrightarrow{BQ}$$
$$=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}$$

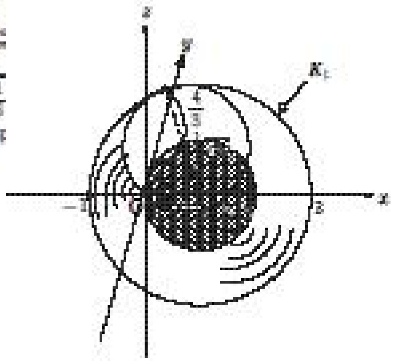
半径2の球面および内部の任意の点を中心に，さらに半径2の球および内部を描くから，中心をO，半径4の球面および内部と考えられる．

$$\therefore\ (\text{求める立体の体積})=\frac{4}{3}\pi\cdot 4^3=\underline{\frac{256}{3}\pi}$$

問2

$$\overrightarrow{OY}=\frac{1}{3}\Big(\underbrace{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}}_{(1)\text{を使えば}\overrightarrow{OX}}+\overrightarrow{OR}\Big)\iff\overrightarrow{OY}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OX}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OR}$$

$$\iff\overrightarrow{OY}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OX}\qquad\therefore\ \underbrace{\left|\overrightarrow{OY}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OR}\right|}_{\text{中心の位置ベクトル}\frac{1}{3}\ \text{半径}\frac{4}{3}\text{の球面および内}}$$



これを満たすYがK_1に属するから，$\frac{1}{3}\overrightarrow{OR}$は点Aを中心とした，半径$2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$の球面および内部となり，

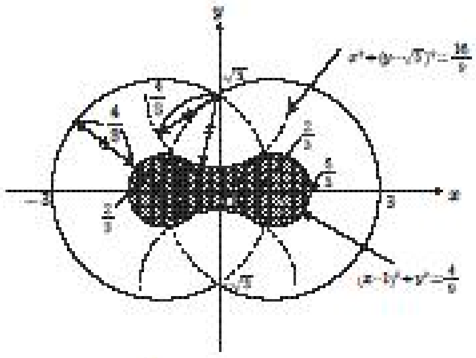
$\overrightarrow{OR}$のRは半径2の球面および内部を描くとわかる．

$$\therefore\ (\text{求める立体の体積})=\frac{4}{3}\pi\cdot 2^3=\underline{\frac{32}{3}\pi}\quad\left(\text{または}\frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\underset{(\text{体積比})}{\underline{\underline{3^3}}}=\frac{32}{3}\pi\text{でもOK}\right)$$

問3　$\underline{\underline{xy\text{平面上で図示し}}}$，問2と同様に考えれば，

和集合は右図の通りで，そこから$\frac{4}{3}$以上内側となる．

これをxyz空間で考えて，



$$\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OR}\text{の示す立体の体積}\right)$$
$$=2\left\{\int_0^{\frac{2}{3}}\pi\left(\sqrt{3}-\sqrt{\frac{16}{9}-x^2}\right)^2dx+\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{5}{3}}\pi\left(\frac{4}{9}-(x-1)^2\right)dx\right\}$$
$$=2\left\{\pi\int_0^{\frac{2}{3}}\left(\frac{43}{9}-x^2-2\sqrt{3}\underline{\sqrt{\frac{16}{9}-x^2}}\right)dx+\pi\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{5}{3}}\left(\frac{4}{9}-(x-1)^2\right)dx\right\}$$

$$\updownarrow$$
$$\left(\begin{array}{l}x=\frac{4}{3}\sin\theta\\ dx=\frac{4}{3}\cos\theta d\theta\\ \begin{array}{c|c}x & 0\to\frac{2}{3}\\ \hline \theta & 0\to\frac{\pi}{6}\end{array}\end{array}\right)$$

$$=2\pi\left[\frac{43}{9}x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{2}{3}}-4\sqrt{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{4}{3}\cdot\cos\theta\cdot\frac{4}{3}\cos\theta d\theta+2\pi\left[\frac{4}{9}x-\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_{\frac{2}{3}}^{\frac{5}{3}}$$
$$=2\pi\left(\frac{86}{27}-\frac{8}{81}\right)-\frac{64\sqrt{3}}{9}\pi\left[\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}+2\pi\left(\frac{20}{27}-\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{27}-\frac{8}{27}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{27}\right)$$
$$=\frac{338}{81}\pi-\frac{16\sqrt{3}}{27}\pi^2$$

$$\therefore\quad(\text{求める立体の体積})=\left(\frac{338}{81}\pi-\frac{16\sqrt{3}}{27}\pi^2\right)\cdot 3^3$$
$$=\frac{338}{3}\pi-16\sqrt{3}\pi^2$$
$$=\frac{\pi}{3}\left(338-48\sqrt{3}\pi\right)$$