〔 I 〕

問 1　$A-kE=\begin{pmatrix}1&2\\-3&6\end{pmatrix}-k\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-k&2\\-3&6-k\end{pmatrix}$ より,

$$\begin{aligned}det(A-kE)&=(1-k)(6-k)-(-6)\\&=k^2-7k+12\\&=(k-3)(k-4)\\&=0\end{aligned}$$

$\therefore\ k=3,4$ (答)

問 2　$k=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ より, $\alpha=3,\ \beta=4$

$$\begin{cases}3P+4Q=A\\P+Q=E\end{cases}$$

$$\therefore\ P=4E-A=\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\-3&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2\\3&-2\end{pmatrix}$$ (答)

$$\therefore\ Q=\ E-P=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&-2\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2\\-3&3\end{pmatrix}$$ (答)

問 3

$$\therefore\ P^2=\begin{pmatrix}3&-2\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2\\3&-2\end{pmatrix}\quad(=P)$$ (答)

$$\therefore\ Q^2=\begin{pmatrix}-2&2\\-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&2\\-3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2\\-3&3\end{pmatrix}\quad(=Q)$$ (答)

$$\therefore\ PQ=\begin{pmatrix}3&-2\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&2\\-3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\quad(=O)$$ (答)

$$\therefore\ QP=\begin{pmatrix}-2&2\\-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\quad(=O)$$ (答)

問 4

$$\begin{aligned}A^n&=(3P+4Q)^n\\&\qquad(\because\ PQ=QP=O)\\&=3^nP^n+4^nQ^n\\&\qquad(\because\ P^2=P,\ Q^2=Q)\\&=3^nP+4^nQ\\&=3^n\begin{pmatrix}3&-2\\3&-2\end{pmatrix}+4^n\begin{pmatrix}-2&2\\-3&3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3^{n+1}-2\cdot4^n&-2\cdot3^n+2\cdot4^n\\3^{n+1}-3\cdot4^n&-2\cdot3^n+3\cdot4^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$ (答)

問 5

$$\begin{aligned}C=A+B&=\begin{pmatrix}1&2\\-3&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a-2&-1\\a^2-2a-4&2a-6\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a-1&1\\a^2-2a-7&2a\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ここで,　$C-kE=\begin{pmatrix}a-1-k&1\\a^2-2a-7&2a-k\end{pmatrix}$ より,

$$\begin{aligned}det(C-kE)&=(a-1-k)(2a-k)-1\cdot(a^2-2a-7)\\&=2a^2-2a-2ka-ka+k+k^2-a^2+2a+7\\&=a^2-3ka+k^2+k+7=0\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

①をみたす実数 k がただ 1 つ存在するから,

① $\iff$ $k^2+(1-3a)k+a^2+7=0$　　$\cdots\cdots②$

$$\begin{aligned}D&=(1-3a)^2-4(a^2+7)\\&=5a^2-6a-27\\&=(5a+9)(a-3)=0\end{aligned}$$

$\therefore\ a=3\ (>0)$ (答)

このとき,

② $\iff$ $(k-4)^2=0$　　$\therefore\ k=4$ (答)

問 6

$$N=C-4E=\begin{pmatrix}2&1\\-4&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\-4&2\end{pmatrix}$$

より,

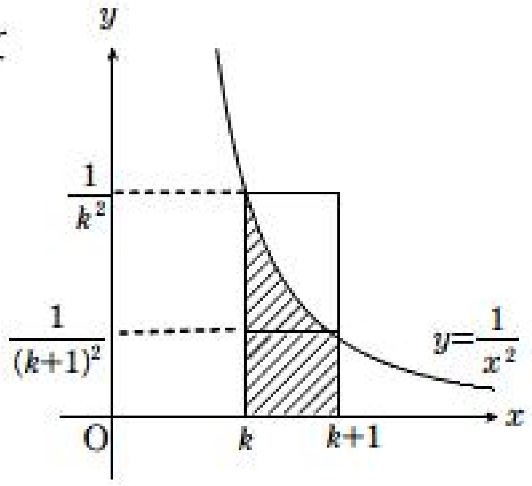
$$N^2=\begin{pmatrix}-2&1\\-4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\-4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$ (答)

問 7　$C=N+4E$ であり, N と $4E$ は交換可より,

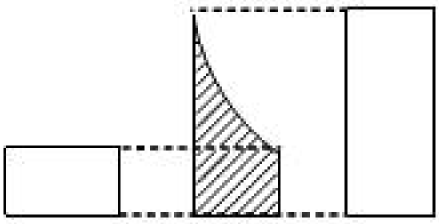
$$\begin{aligned}\therefore\ C^n&=(N+4E)^n={}_n\mathrm{C}_0N^0(4E)^n+{}_n\mathrm{C}_1N^1(4E)^{n-1}+\underbrace{{}_n\mathrm{C}_2N^2(4E)^{n-2}+\cdots}_{=O}\\&=4^nE+n\cdot4^{n-1}N\\&=4^n\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+n\cdot4^{n-1}\begin{pmatrix}-2&1\\-4&2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}(4-2n)\cdot4^{n-1}&n\cdot4^{n-1}\\-n\cdot4^n&(4+2n)\cdot4^{n-1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$ (答)

〔Ⅱ〕

問１　$y=\dfrac{1}{x^2}$ $(x>0)$ は単調減少．区間 $[k,\ k+1]$ において右図のグラフより，



$$\frac{1}{(k+1)^2}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{x^2}<\frac{1}{k^2}$$



と評価できる．

$\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{dx}{x^2}<\frac{1}{k^2}$ ……① において，$k=m,\ m+1,\ m+2,\cdots\cdots,n$ まで代入し，辺々和をとると，

$$\int_m^{n+1}\frac{dx}{x^2}<\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

$$\iff\ \left[-\frac{1}{x}\right]_m^{n+1}<\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

$$\iff\ \frac{n+1-m}{m(n+1)}<\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\ \ \cdots\cdots①'$$

次に，$\displaystyle\frac{1}{(k+1)^2}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{x^2}$ ……② において，$k=m-1,\ m,\ m+1,\cdots\cdots,n-1$ まで代入し，辺々和をとると，

$$\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\int_{m-1}^{n}\frac{dx}{x^2}$$

$$\iff\ \frac{1}{m^2}+\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{n+1-m}{n(m-1)}\ \ \cdots\cdots②'$$

以上①$'$，②$'$ より，

$$\frac{n+1-m}{n(m-1)}<\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{n+1-m}{n(m-1)}\ \ \cdots\cdots③$$

は示された．（証明終）

問２　③で $m=2$ を代入すると，

$$\frac{n-1}{2(n+1)}<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{n-1}{n}$$

$+1$

$$\iff\ 1+\frac{n-1}{2(n+1)}<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1+\frac{n-1}{n}$$

辺々極限をとると，

$$\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{n-1}{2(n+1)}\right\}\leqq\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\leqq\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{n}\right)$$

$$\therefore\ \frac{3}{2}\leqq\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\leqq 2$$

は，示された．（証明終）

問３　③で $m=4$ を代入すると，

$$\frac{n-3}{4(n+1)}<\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{n-3}{3n}$$

$+\left(1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}\right)$

$$\iff\ \frac{49}{36}+\frac{n-3}{4(n+1)}<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{49}{36}+\frac{n-3}{3n}$$

辺々極限をとると，

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{49}{36}+\frac{n-3}{4(n+1)}\right\}\leqq\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\leqq\lim_{n\to\infty}\left(\frac{49}{36}+\frac{n-3}{3n}\right)$$

$\dfrac{29}{18}\leqq\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\leqq\frac{61}{36}$ は，示された．（証明終）

〔Ⅲ〕

問１

$$I_{k+1}(x)=\int\frac{(\log x)^{k+1}}{x^2}dx$$
$$=\int\left(-\frac{1}{x}\right)'(\log x)^{k+1}dx$$
$$=-\frac{(\log x)^{k+1}}{x}+\int\frac{1}{x}\cdot(k+1)\cdot\frac{1}{x}\cdot(\log x)^k dx$$
$$=(k+1)I_k(x)-\frac{(\log x)^{k+1}}{x}$$

$$\therefore\ \ I_{k+1}(x)=(k+1)I_k(x)-\frac{(\log x)^{k+1}}{x}\quad (x\geqq 1,\ k=0,1,2,\cdots)\ (答)\cdots\cdots①$$

ここで，

$$I_0(x)=\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C\quad (C は積分定数)\qquad (答)$$

$$I_4(x)=4I_3(x)-\frac{(\log x)^4}{x}$$
$$=4\left\{3I_2(x)-\frac{(\log x)^3}{x}\right\}-\frac{(\log x)^4}{x}$$
$$=12\left\{2I_1(x)-\frac{(\log x)^2}{x}\right\}-\frac{4(\log x)^3}{x}-\frac{(\log x)^4}{x}$$
$$=24\left\{I_0(x)-\frac{(\log x)^1}{x}\right\}-\frac{12(\log x)^2}{x}-\frac{4(\log x)^3}{x}-\frac{(\log x)^4}{x}$$
$$=-\frac{24+24\log x+12(\log x)^2+4(\log x)^3+(\log x)^4}{x}+C$$

（C は積分定数）（答）

問２ $g(x)=\dfrac{3}{e}x^{\frac{1}{3}}-\log x\ \ (x>0)$ とおく．

$$g'(x)=\frac{1}{e}\cdot x^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{x}=\frac{x^{\frac{1}{3}}-e}{ex}$$

x	(0)	$\cdots$	e^3	$\cdots$	$(+\infty)$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$		↘	(最小)	↗	

$g(x)\geqq g(e^3)$　　よって，$\log x\leqq\dfrac{3}{e}x^{\frac{1}{3}}\ \ (x>0)$ は示された．（証明終）

問３ (a)

$$f(x)=\frac{(\log x)^2}{x}\quad (x\geqq 1)$$
$$f'(x)=\frac{2\log x\cdot\frac{1}{x}\cdot x-(\log x)^2\cdot 1}{x^2}$$
$$=\frac{\log x\cdot(2-\log x)}{x^2}$$

x	1	$\cdots$	e^2	$\cdots$	$(+\infty)$
$f'(x)$	0	+	0	−	
$f(x)$		↗	(極大)	↘	(0)

（答）

十分大きな x に対して問２より，$\log x\leqq\dfrac{3}{e}x^{\frac{1}{3}}$

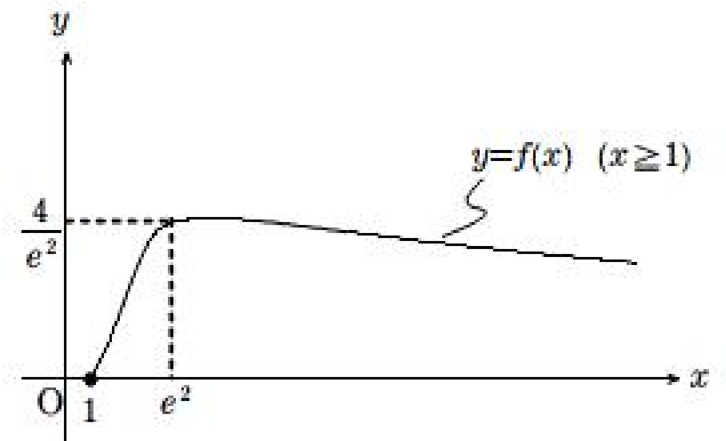
$$0<\frac{(\log x)^2}{x}<\frac{\left(\frac{3}{e}x^{\frac{1}{3}}\right)^2}{x}$$

と評価できる．　　（最右辺）→ 0 $(x\to\infty)$

はさみうちの原理より，　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$

$x=e^2$ で極大となり，（極大値）$=f(e^2)=\dfrac{4}{e^2}$

グラフ概形は下記の通り．



（答）

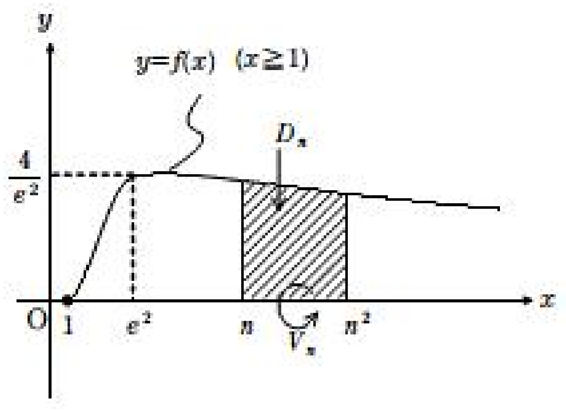
(b)

$$S_n=\int_n^{n^2}\frac{(\log x)^2}{x}dx=\left[\frac{1}{3}(\log x)^3\right]_n^{n^2}=\frac{1}{3}\left\{(2\log n)^3-(\log n)^3\right\}$$
$$=\frac{7}{3}(\log n)^3$$

（答）

(c)

$$V_n=\pi\int_n^{n^2}\frac{(\log x)^4}{x^2}dx$$



$$=\pi\left[-\frac{24+24\log x+12(\log x)^2+4(\log x)^3+(\log x)^4}{x}\right]_n^{n^2}$$
$$=\pi\left\{-\frac{24+48\log n+48(\log n)^2+32(\log n)^3+16(\log n)^4}{n^2}\right.$$
$$\left.+\frac{24+24\log n+12(\log n)^2+4(\log n)^3+(\log n)^4}{n}\right\}$$
$$=\frac{\pi}{n^2}\left\{24(n-1)+24\log n\cdot(n-2)+12(\log n)^2\cdot(n-4)\right.$$
$$\left.+4(\log n)^3\cdot(n-8)+(\log n)^4\cdot(n-16)\right\}$$

（答）

(d)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nV_n}{(\log n)\cdot S_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n\cdot\frac{\pi}{n^2}\left\{24(n-1)+24\log n\cdot(n-2)+12(\log n)^2\cdot(n-4)\right.}{\frac{7}{3}(\log n)^4}\right.$$
$$\left.+\frac{\left.4(\log n)^3\cdot(n-8)+(\log n)^4\cdot(n-16)\right\}}{\frac{7}{3}(\log n)^4}\right\}$$
$$=\frac{\pi}{\frac{7}{3}}=\frac{3\pi}{7}\qquad (答)$$