[Ⅰ]

問 1(1)

9 枚から 2 枚の取り出し方は ${}_9C_2=\dfrac{9\cdot 8}{2}=36$(通り)

スペード n 枚から 2 枚の取り出し方は ${}_nC_2=\dfrac{n\cdot(n-1)}{2}$(通り)

$$\therefore P=\dfrac{\dfrac{n(n-1)}{2}}{36}=\underline{\dfrac{n(n-1)}{72}} \qquad \text{(答)}$$

(2)　スペード n 枚から 1 枚,ハート $9-n$ 枚から 1 枚の取り出し方は

${}_nC_1\cdot{}_{9-n}C_1=n(9-n)$(通り)

$$\therefore P=\underline{\dfrac{n(9-n)}{36}} \qquad \text{(答)}$$

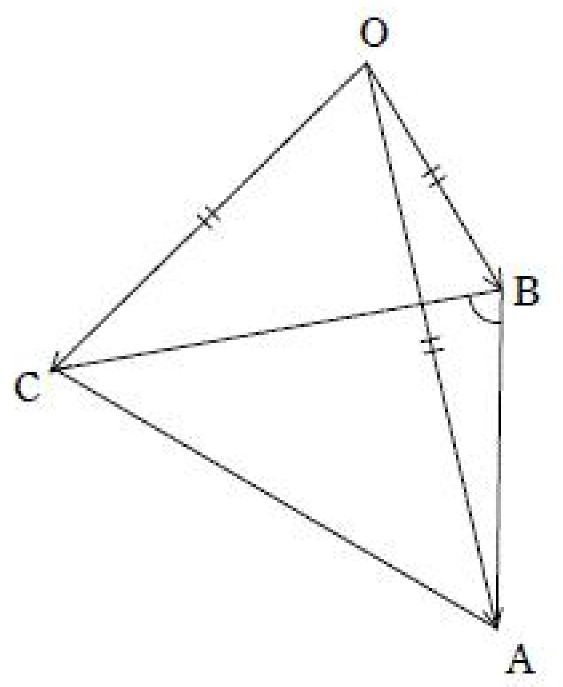
(3)

$$\begin{cases}\dfrac{3}{10}\leqq\dfrac{n(n-1)}{72}<\dfrac{6}{10}\\ \dfrac{n(9-n)}{36}<\dfrac{4}{10}\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}21.6\leqq n(n-1)<43.2 & \cdots\cdots①\\ n(9-n)<14.4 & \cdots\cdots②\end{cases}$$

①,②を同時に満たす $0\leqq n\leqq 9$ の整数 n は $\underline{7}$　(答)

問 2



$$\begin{cases}|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{3}\\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=2 \quad\cdots\cdots①\\ \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=1\end{cases}$$

(1)　$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2$

$=3+3-2\cdot 2$　$(\because ①)$

$=2$

$|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}|^2$

$=3+3-2\cdot 2$　$(\because ①)$

$=2$

$\therefore \underline{|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{2}}\,(\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\sqrt{2})$　(答)

(2)　$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$

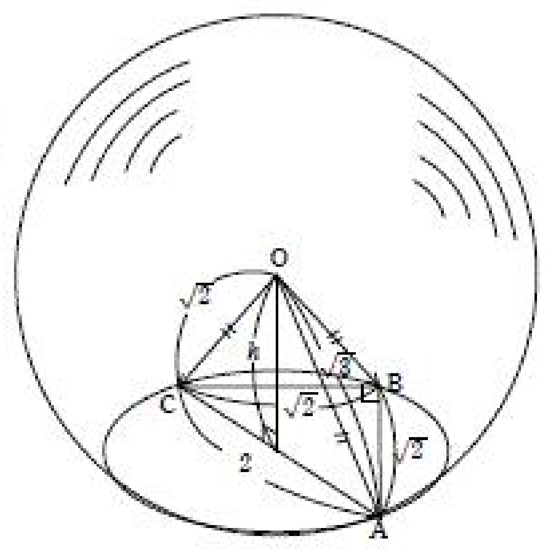
$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OB}|^2$

$=1-2-2+3$　$(\because ①)$

$=0$

$\therefore \underline{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0}$　$(\angle\mathrm{ABC}=90°)$　(答)

(3)　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=1$



半径 $\sqrt{3}$ の球に埋め込んで考えると,四面体OABCの高さ h は,

$h=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1}=\sqrt{2}$

$\therefore$(四面体OABCの体積)$=1\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{3}$

$=\underline{\dfrac{\sqrt{2}}{3}}$　(答)

問 3　$(a^2+1)x^2-2(a+1)x+a=0$　,$x=\sin\theta,\cos\theta$　$(0\leqq\theta\leqq\pi)$

解と係数の関係より,

$$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{2(a+1)}{a^2+1}\\ \sin\theta\cos\theta=\dfrac{a}{a^2+1}\end{cases}$$

これより,

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$$

$$\iff \left\{\dfrac{2(a+1)}{a^2+1}\right\}^2=1+2\cdot\dfrac{a}{a^2+1}$$

$$\iff 4(a+1)^2=a^4+2a^2+1+2a(a^2+1)$$

$$\iff a^4+2a^3-2a^2-6a-3=0$$

$$\iff (a+1)^2(a^2-3)=0$$

$$\therefore a=-1,\pm\sqrt{3}$$

(ⅰ) $a=-1$ のとき,

$$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=0\\ \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\quad(0\leqq\theta\leqq\pi)$$

$\therefore(\cos\theta,\sin\theta)=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$　$\therefore\theta=\dfrac{3}{4}\pi$

(ⅱ) $a=\sqrt{3}$ のとき,

$$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\\ \sin\theta\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\end{cases}\quad(0\leqq\theta\leqq\pi)$$

$\therefore(\cos\theta,\sin\theta)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right),\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$　$\therefore\theta=\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}$

(ⅲ) $a=-\sqrt{3}$ のとき,

$$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\end{cases}\quad(0\leqq\theta\leqq\pi)$$

$\therefore(\cos\theta,\sin\theta)=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$　$\therefore\theta=\dfrac{5}{6}\pi$

以上(ⅰ)~(ⅲ)より,$\underline{(a,\theta)=\left(-1,\dfrac{3}{4}\pi\right),\left(\sqrt{3},\dfrac{\pi}{6}\right),\left(\sqrt{3},\dfrac{\pi}{3}\right),\left(-\sqrt{3},\dfrac{5}{6}\pi\right)}$　(答)

[Ⅱ]

問 1　$\log x-\log k-\dfrac{1}{k}(x-k)$

$$=\log\frac{x}{k}-\frac{x}{k}+1$$

$$=\log t-t+1 \quad \left(t=\frac{x}{k}>0 \text{ とおく}\right)$$

ここで，$f(t)=\log t-t+1 (t>0)$ とする．

$$f'(t)=\frac{1}{t}-1=\frac{1-t}{t}$$

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	$(+\infty)$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	0	↘	

これより，

$$f(t)\leqq 0 \iff \log x-\log k\boxed{\leqq}\frac{1}{k}(x-k) \quad \cdots\cdots①$$

1　　（答）

ここで,等号成立は,$t=\dfrac{x}{k}=1$ のとき,つまり $x=k$ のとき成立　　（証明終）

問 2　①において,$k=\alpha a+\beta b+\gamma c$,x は順に a, b, c を代入.

$$\log a-\log(\alpha a+\beta b+\gamma c)\leqq\frac{1}{\alpha a+\beta b+\gamma c}(a-\alpha a-\beta b-\gamma c) \quad \cdots\cdots②$$

$$\log b-\log(\alpha a+\beta b+\gamma c)\leqq\frac{1}{\alpha a+\beta b+\gamma c}(b-\alpha a-\beta b-\gamma c) \quad \cdots\cdots③$$

$$\log c-\log(\alpha a+\beta b+\gamma c)\leqq\frac{1}{\alpha a+\beta b+\gamma c}(c-\alpha a-\beta b-\gamma c) \quad \cdots\cdots④$$

ここで,②・α＋③・β＋④・γ とすれば,（$\alpha+\beta+\gamma=1$ に注意）

$$\alpha\log a+\beta\log b+\gamma\log c-(\alpha+\beta+\gamma)\log(\alpha a+\beta b+\gamma c)$$

$$\leqq\frac{1}{\alpha a+\beta b+\gamma c}\{\alpha a+\beta b+\gamma c-(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha a+\beta b+\gamma c)\}$$

$$\iff \alpha\log a+\beta\log b+\gamma\log c\boxed{\leqq}\log(\alpha a+\beta b+\gamma c) \quad \cdots\cdots⑤$$

2　　（答）

問 3　⑤より，

$$\alpha_1\log a+\beta_1\log b+\gamma_1\log c\leqq\log(\alpha_1 a+\beta_1 b+\gamma_1 c) \quad \cdots\cdots⑥$$

$$\alpha_2\log a+\beta_2\log b+\gamma_2\log c\leqq\log(\alpha_2 a+\beta_2 b+\gamma_2 c) \quad \cdots\cdots⑦$$

$$\alpha_3\log a+\beta_3\log b+\gamma_3\log c\leqq\log(\alpha_3 a+\beta_3 b+\gamma_3 c) \quad \cdots\cdots⑧$$

$\sum_{n=1}^{3}\alpha_n=\sum_{n=1}^{3}\beta_n=\sum_{n=1}^{3}\gamma_n=1$ と $\alpha_n+\beta_n+\gamma_n=1 (n=1, 2, 3)$ より，

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1\\ \beta_1+\beta_2+\beta_3=1\\ \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=1\\ \alpha_1+\beta_1+\gamma_1=1\\ \alpha_2+\beta_2+\gamma_2=1\\ \alpha_3+\beta_3+\gamma_3=1\end{cases} \quad \cdots\cdots⑨$$

⑨に注意して,⑥,⑦,⑧の辺々和をとると,

$$\log a+\log b+\log c\leqq\log s_1+\log s_2+\log s_3$$

$$\iff \log abc\leqq\log s_1s_2s_3$$

$$\iff abc\leqq s_1s_2s_3$$

$$\therefore s_1s_2s_3\boxed{\geqq}abc$$

3　　（答）

[Ⅲ]

問 1(1)　$J=\int_0^2 x^2e^{-x^2}dx$ とおく.

$$J=\int_0^2\left(-\frac{x}{2}\right)\left(e^{-x^2}\right)'dx$$
$$=\left[-\frac{x}{2}e^{-x^2}\right]_0^2-\int_0^2\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-x^2}dx$$
$$=-e^{-4}+\frac{1}{2}I$$

$$\therefore J=\underline{\frac{1}{2}I-\frac{1}{e^4}}$$　(答)

(2)　$K=\int_0^2 x^4e^{-x^2}dx$ とおく.

$$K=\int_0^2\left(-\frac{x^3}{2}\right)\left(e^{-x^2}\right)'dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{2}e^{-x^2}\right]_0^2-\int_0^2\left(-\frac{3}{2}x^2\right)e^{-x^2}dx$$
$$=-4e^{-4}+\frac{3}{2}J$$
$$=-4e^{-4}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}I-\frac{1}{e^4}\right)$$
$$=\frac{3}{4}I-\frac{11}{2}e^{-4}$$

$$\therefore K=\underline{\frac{3}{4}I-\frac{11}{2e^4}}$$　(答)

問 2　$\left[\{f(x)+f'(x)\}^2\right]_a^b=\int_a^b 2\{f(x)+f'(x)\}\{f'(x)+f''(x)\}dx$ より,

$$\int_a^b\left(\{f(x)\}^2-\{f'(x)\}^2+\{f''(x)\}^2\right)dx+\left[\{f(x)+f'(x)\}^2\right]_a^b$$
$$=\int_a^b\left(\{f(x)\}^2-\{f'(x)\}^2+\{f''(x)\}^2\right)dx$$
$$\quad+\int_a^b\left(2f(x)f'(x)+2f(x)f''(x)+2\{f'(x)\}^2+2f'(x)f''(x)\right)dx$$
$$=\int_a^b\left(\{f(x)\}^2+\{f'(x)\}^2+\{f''(x)\}^2+2f(x)f'(x)+2f'(x)f''(x)+2f''(x)f(x)\right)dx$$
$$=\int_a^b\{f(x)+f'(x)+f''(x)\}^2dx\geqq 0 \quad \cdots\cdots①$$　(証明終)

問 3　$f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ とおくと, $\{f(x)\}^2=e^{-x^2}$

$f'(x)=-xe^{-\frac{x^2}{2}}$ より, $\{f'(x)\}^2=x^2e^{-x^2}$

$f''(x)=-e^{-\frac{x^2}{2}}+x^2e^{-\frac{x^2}{2}}=(x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$ より, $\{f''(x)\}^2=(x^2-1)^2e^{-x^2}$

ここで, $0\leqq x\leqq 2$ で $f(x)$, $f'(x)$ は微分可能であり, $f''(x)$ は連続である.

・$\{f(x)\}^2-\{f'(x)\}^2+\{f''(x)\}^2=e^{-x^2}-x^2e^{-x^2}+(x^4-2x^2+1)e^{-x^2}$
$\qquad=2e^{-x^2}-3x^2e^{-x^2}+x^4e^{-x^2}$

・$\{f(x)+f'(x)\}^2=\left(e^{-\frac{x^2}{2}}-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)^2=(1-x)^2e^{-x^2}$

ここで①より,

$$\int_0^2\left(2e^{-x^2}-3x^2e^{-x^2}+x^4e^{-x^2}\right)dx+\left[(1-x)^2e^{-x^2}\right]_0^2\geqq 0$$
$$\Longleftrightarrow 2I-3J+K+e^{-4}-1\geqq 0$$
$$\Longleftrightarrow 2I-3\left(\frac{1}{2}I-\frac{1}{e^4}\right)+\left(\frac{3}{4}I-\frac{11}{2e^4}\right)+\frac{1}{e^4}-1\geqq 0$$
$$\Longleftrightarrow \frac{5}{4}I\geqq\frac{3}{2e^4}+1$$
$$\Longleftrightarrow I\geqq\frac{4}{5}+\frac{6}{5e^4}$$　(証明終)