[I]

問 1(1)

n 秒後と $n+1$ 秒後の推移より

	(n 秒後)		(($n+1$)秒後)
(A)	p_n	$\xrightarrow{\times\frac{1}{4}}$	p_{n+1}
		$\nearrow \times\frac{3}{8}$	
(A 以外)	$1-p_n$		$1-p_{n+1}$

よって， $p_{n+1}=\dfrac{1}{4}p_n+\dfrac{3}{8}(1-p_n)$ …（互いに排反より）

したがって， $\underline{p_{n+1}=-\dfrac{1}{8}p_n+\dfrac{3}{8}\ (p_0=1)\quad (n=0,1,2,\cdots)}$ （答）

(2) (1)の結果より，$p_{n+1}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{8}\left(p_n-\dfrac{1}{3}\right)$

数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{3}\right\}$ は，初項 $p_0-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$ ，公比 $-\dfrac{1}{8}$ の等比数列

$p_n-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{8}\right)^n$

したがって， $\underline{p_n=\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{8}\right)^n+\dfrac{1}{3}\ (n=0,1,2,\cdots)}$ （答）

(3) $p=\lim\limits_{n\to\infty}p_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{8}\right)^n+\dfrac{1}{3}\right\}=\underline{\dfrac{1}{3}}$ （答）

(4)

$$
\begin{aligned}
&\left|p_n-p\right|<5^{-20}\\
\Longleftrightarrow &\left|\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{8}\right)^n\right|<5^{-20}\\
\Longleftrightarrow &\left(\frac{1}{2}\right)^{3n}<\frac{3}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{20}\\
\Longleftrightarrow &3n\log_{10}\frac{1}{2}<\log_{10}3-\log_{10}2+20(\log_{10}2-1)\\
\Longleftrightarrow &-3n\cdot 0.3010<19\cdot 0.3010+0.4771-20\\
\Longleftrightarrow &-0.9030n<-13.8039\\
\Longleftrightarrow &n>15.28
\end{aligned}
$$

したがって，$\underline{(\text{最小の}n)=16}$ （答）

問 2(1)

$\dfrac{y+1}{(x+1)^2}=k\Longleftrightarrow y=k(x+1)^2-1$

・(k が最大のとき) ⟵ (A) のとき

$$
\begin{aligned}
&k(x+1)^2-1=-x^2+8x-12\\
\Longleftrightarrow &(k+1)x^2+2(k-4)x+k+11=0
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
&\frac{D}{4}=(k-4)^2-(k+1)(k+11)=0\\
\Longleftrightarrow &-20k+5=0\\
\Longleftrightarrow &k=\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

したがって，$\underline{(k\text{ の最大値})=\dfrac{1}{4}\quad (x,y)=(3,3)}$ （答）

・(k が最小のとき) ⟵ (B) のとき

$(x,y)=(4,1)$ $\cdots k=\dfrac{2}{25}$

$(x,y)=(2,0)$ $\cdots k=\dfrac{1}{5}$

$(x,y)=(5,3)$ $\cdots k=\dfrac{1}{9}$

したがって，$\underline{(k\text{ の最小値})=\dfrac{2}{25}\quad (x,y)=(4,1)}$ （答）

(2) $F(k)=\dfrac{y+1}{(x+1)^2}+\dfrac{(x+1)^2}{y+1}$

$=k+\dfrac{1}{k}\quad\left((1)より，\dfrac{2}{25}\leqq k\leqq\dfrac{1}{4}\right)$ とおく

$F'(k)=1-\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{(k+1)(k-1)}{k^2}$

増減表を描くと下の通り

k	$\frac{2}{25}$				$\frac{1}{4}$
$F'(k)$			$-$		
$F(k)$	$\frac{629}{50}$		↘		$\frac{17}{4}$

$$
\begin{cases}
(\text{最大値})=F\left(\dfrac{2}{25}\right)=\dfrac{629}{50}\\
(\text{最小値})=F\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{17}{4}
\end{cases}
$$
（答）

[Ⅱ]

問１　$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+\frac{k}{2}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{2n}}$$

$$=\int_0^2\frac{1}{1+\frac{x}{2}}dx$$

$$=\left[2\log\left(1+\frac{x}{2}\right)\right]_0^2$$

$$=\underline{2\log 2}\qquad\text{（答）}$$

問２　$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+\frac{2k-1}{2}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}-\frac{1}{2n}}$$

$$=\int_0^2\frac{1}{1+x}dx$$

$$=\underline{\log 3}\qquad\text{（答）}$$

（$\displaystyle \frac{1}{1+\frac{k}{n}}<\frac{1}{1+\frac{k}{n}-\frac{1}{2n}}<\frac{1}{1+\frac{k-1}{n}}$

したがって，

$\displaystyle \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}<\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}-\frac{1}{2n}}<\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k-1}{n}}$

として，はさみうちの原理を用いてもよい）

問３　$\displaystyle A_n=\left\{\left(1+\sin\frac{n\pi}{2n}\right)^{\sin\frac{n\pi}{n}}\left(1+\sin\frac{(n+1)\pi}{2n}\right)^{\sin\frac{(n+1)\pi}{n}}\cdots\cdots(1+\sin\pi)^{\sin 2\pi}\right\}^{\frac{1}{n}}$

とおくと，$A_n>0$ より辺々対数をとる

$$\log A_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n}\log\left\{1+\sin\frac{(n+k)\pi}{2n}\right\}^{\sin\frac{(n+k)\pi}{n}}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\log\left\{1+\sin\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\}^{\sin\pi\left(1+\frac{k}{n}\right)}$$

したがって，

$$\lim_{n\to\infty}\log A_n=\int_0^1\log\left\{1+\sin\frac{\pi}{2}(1+x)\right\}^{\sin\pi(1+x)}dx$$

$$=\int_0^1(-\sin\pi x)\log\left(1+\cos\frac{\pi x}{2}\right)dx$$

ここで$1+\cos\dfrac{\pi x}{2}=t$ とおく　　$-\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi x}{2}dx=dt$

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \longrightarrow & 1 \\ \hline t & 2 & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

$$(\text{与式})=\int_2^1(t-1)\cdot\frac{4}{\pi}\log t\,dt$$

$$=-\frac{4}{\pi}\int_1^2\left(\frac{t^2}{2}-t\right)'\log t\,dt$$

$$=-\frac{4}{\pi}\left[\left(\frac{t^2}{2}-t\right)\log t\right]_1^2+\frac{4}{\pi}\int_1^2\left(\frac{t}{2}-1\right)dt$$

$$=-\frac{1}{\pi}$$

$$=\log e^{-\frac{1}{\pi}}$$

したがって，$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\log A_n=\log e^{-\frac{1}{\pi}}$

すなわち，$\displaystyle \underline{\lim_{n\to\infty}A_n=e^{-\frac{1}{\pi}}}$　　　（答）

[Ⅲ]

問 1

$$
\begin{aligned}
V_n &= \pi\int_0^{n-m}(-x^2+nx)^2\,dx+\pi\int_{n-m}^{n+m}(mx)^2\,dx \\
&\qquad -\pi\int_n^{n+m}(x^2-nx)^2\,dx \\
&= \pi\int_0^{n-m}(x^4-2nx^3+n^2x^2)\,dx+\pi\int_{n-m}^{n+m}m^2x^2\,dx \\
&\qquad -\pi\int_n^{n+m}(x^4-2nx^3+n^2x^2)\,dx \\
&= \underline{\left(\frac{n^5}{30}+\frac{4m^5}{15}+\frac{4m^3n^2}{3}\right)\pi} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

問 2

$\mathrm{P}(x, mx)$, $\mathrm{Q}(x, x^2-nx)$ に対し,

$\overline{\mathrm{PQ}} = mx-(x^2-nx) = (m+n)x-x^2$

線分 PQ を $y=mx$ のまわりに 1 回転してできる

笠形の側面積は,

$$
\pi\overline{PQ}^2\cdot\frac{1}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{\pi}{\sqrt{m^2+1}}\{(m+n)x-x^2\}^2
$$

$$
\begin{aligned}
W_n &= \int_0^{n+m}\frac{\pi}{\sqrt{m^2+1}}\{(m+n)x-x^2\}^2\,dx \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{m^2+1}}\int_0^{n+m}\{(m+n)^2x^2-2(m+n)x^3+x^4\}\,dx \\
&= \underline{\frac{(n+m)^5}{30\sqrt{m^2+1}}\pi} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

問 3

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{W_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n^5}{30}+\frac{4m^5}{15}+\frac{4m^3n^2}{3}\right)\pi}{\frac{(n+m)^5}{30\sqrt{m^2+1}}\pi} = \underline{\sqrt{m^2+1}} \qquad \text{(答)}
$$