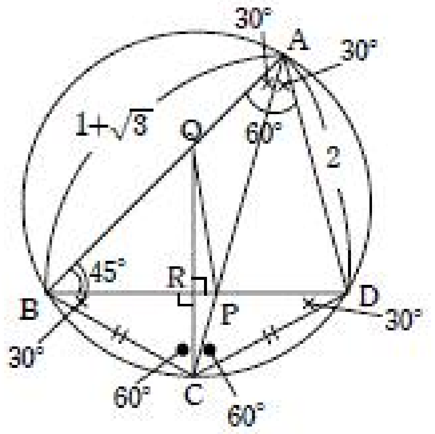
〔Ⅰ〕

問1



(1) 余弦定理を用いて,

$$BD^2=\left(1+\sqrt{3}\right)^2+2^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot 2\cdot\cos 60°$$
$$=6 \qquad よって,\ \underline{BD=\sqrt{6}\ (答)}$$

(2) 正弦定理を用いて,

$$\frac{2}{\sin\angle ABD}=\frac{\sqrt{6}}{\sin 60°}$$
$$\Longleftrightarrow\ \sin\angle ABD=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad よって,\ \underline{\angle ABD=45°\ (答)} \leftarrow \left(0°<\angle ABD<120°\right)$$

(3) $\angle CBD=\angle CAD=30°,\ \angle CDB=\angle CAB=30°$

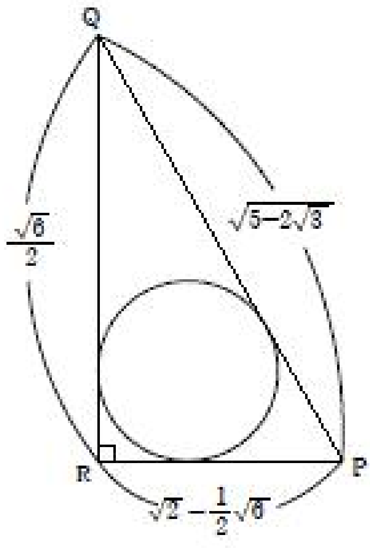
より, AC は$\angle BAD$の二等分線.

よって,

$$BP:PD=1+\sqrt{3}:2$$

したがって, $BP=\sqrt{6}\cdot\dfrac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}+2}=\underline{\sqrt{2}\ (答)}$

(4) $PR=\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{6}$



次に, $QR=BR=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

三平方の定理により,

$$PQ^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2$$
$$=5-2\sqrt{3}$$

よって, $PQ=\sqrt{5-2\sqrt{3}}$

内接円半径をr (>0)とおくと,

$$\frac{r}{2}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}+\sqrt{5-2\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

よって, $\underline{r=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5-2\sqrt{3}}}{2}\ (答)}$

問2

(1)

$$\begin{cases} a_{3k-2}=1 \\ a_{3k-1}=2 \\ a_{3k}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_{3k-2}=1 \\ b_{3k-1}=1 \\ b_{3k}=0 \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{2016}\left(a_n+b_n\right)=\sum_{k=1}^{672}\left\{\left(a_{3k-2}+a_{3k-1}+a_{3k}\right)+\left(b_{3k-2}+b_{3k-1}+b_{3k}\right)\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{672}(1+2+0+1+1+0)$$
$$=5\cdot 672=\underline{3360\ (答)}$$

(2)

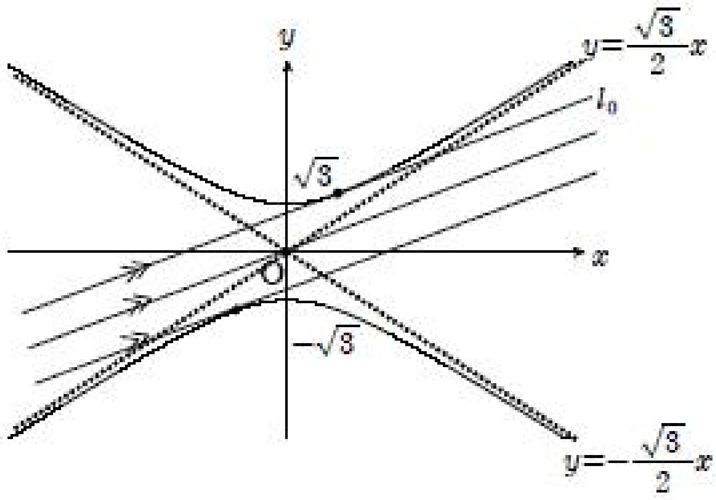
$$\sum_{n=1}^{m}\left(a_{n+2}+b_{n+1}+2a_n\right)$$
$$=\underline{3+5+3}+\underline{3+5+3}+\cdots\cdots$$
$$=\underbrace{11\cdot 183}_{(2013)}+3$$

より,

$$183\cdot 3+1=550 \qquad よって,\ \underline{m=550\ (答)}$$

問3

(1) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=-1$ と $3x-4y+k=0$ を連立すると,



$$3x^2-4\left(\frac{3x+k}{4}\right)^2=-12$$
$$\Longleftrightarrow\ 3x^2-6kx+48-k^2=0\ \cdots\cdots ①$$

ここで,

$$D/4=(3k)^2-3\left(48-k^2\right)$$
$$=12k^2-144=0$$

よって, $\underline{k=\pm 2\sqrt{3}\ (答)}$

(2) (1)の$k=2\sqrt{3}$のときの接点は, ①より, $\left(x-2\sqrt{3}\right)^2=0$から$\left(2\sqrt{3},2\sqrt{3}\right)$

これより, 点$\left(2\sqrt{3},2\sqrt{3}\right)$ と $l_0:3x-4y=0$ の距離を求めればよい.

$$\frac{\left|3\cdot 2\sqrt{3}-4\cdot 2\sqrt{3}\right|}{\sqrt{9+16}}=\underline{\frac{2\sqrt{3}}{5}\ (答)}$$

〔Ⅱ〕

問 1

$$f(x)=\int_1^x t(x-t+1)e^{-(x-t+1)^2}dt$$

$u=x-t+1$ とおく．$du=-dt$

t	$1\ \to\ x$
u	$x\ \to\ 1$

$$f(x)=\int_x^1(x+1-u)ue^{-u^2}\cdot(-1)du$$
$$=x\int_1^x ue^{-u^2}du+\int_1^x(1-u)ue^{-u^2}du$$

よって，$f'(x)=\int_1^x ue^{-u^2}du+x\cdot xe^{-x^2}+(1-x)xe^{-x^2}$

$$=\underbrace{\int_1^x ue^{-u^2}du}_{①}+xe^{-x^2}$$

①で，$u^2=v$ とおく．　$2udu=dv$

u	$1\ \to\ x$
v	$1\ \to\ x^2$

$$(①)=\int_1^{x^2}e^{-v}\cdot\frac{1}{2}dv=-\frac{1}{2}\left[e^{-v}\right]_1^{x^2}=-\frac{1}{2}\left(e^{-x^2}-e^{-1}\right)$$

よって，$\underline{f'(x)=xe^{-x^2}-\frac{1}{2}e^{-x^2}+\frac{1}{2e}\ (答)}$

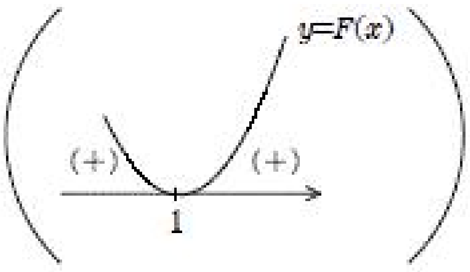
問 2

$F(x)=f(x)-g(x)\qquad(x>0)$ とおく．

$$F'(x)=f'(x)-g'(x)=\frac{1}{2e}-\frac{1}{2e^{x^2}}$$

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	$(+\infty)$
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		↘	0	↗	

$F(1)=f(1)-g(1)=0$
となる．



したがって，$\begin{cases}f(x)=g(x) & \cdots\cdots(x=1)\\ f(x)>g(x) & \cdots\cdots(0<x<1,\,1<x)\end{cases}$　（答）

問 3

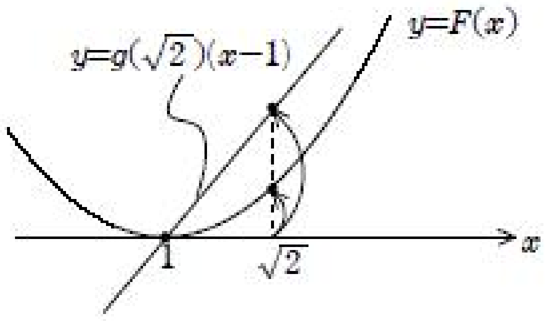
$(傾き)=f'\left(\sqrt{2}\right)-g'\left(\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2e}-\frac{1}{2e^2}=g\left(\sqrt{2}\right)$　で点 $(1,0)$ を通る直線は，

$$y=g\left(\sqrt{2}\right)(x-1)$$

問 2 より，　$F(x)=f(x)-g(x)\ (x>0)$ だから，

$$F'(x)=f'(x)-g'(x)=\frac{1}{2e}-\frac{1}{2}e^{-x^2}=\underline{\underline{g(x)}}$$
$F''(x)=g'(x)=xe^{-x^2}\quad(>0)\ \leftarrow\ \left(y=F(x)\ 下に凸\right)$

右図の　$x=\sqrt{2}$　を代入した値を比べ，



$$F\left(\sqrt{2}\right)<g\left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)$$
$$\Longleftrightarrow\ f\left(\sqrt{2}\right)-g\left(\sqrt{2}\right)<\sqrt{2}g\left(\sqrt{2}\right)-g\left(\sqrt{2}\right)$$
$$\Longleftrightarrow\ f\left(\sqrt{2}\right)<\sqrt{2}g\left(\sqrt{2}\right)\ \cdots\cdots ②$$

さらに，

$$F\left(\sqrt{2}\right)=f\left(\sqrt{2}\right)-g\left(\sqrt{2}\right)>0$$
$$\Longleftrightarrow\ g\left(\sqrt{2}\right)<f\left(\sqrt{2}\right)\ \cdots\cdots ③$$

②，③より，

$$g\left(\sqrt{2}\right)<f\left(\sqrt{2}\right)<\sqrt{2}g\left(\sqrt{2}\right)$$
$$\Longleftrightarrow\ \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}\right)}_{④}<f\left(\sqrt{2}\right)<\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}\right)}_{⑤}$$

④より，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}\right)>\frac{1}{2}(0.367-0.136)=0.1155>0.115$$

⑤より，

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}\right)<\frac{\sqrt{2}}{2}(0.368-0.135)<\underbrace{1.415\cdot0.1165}_{(0.1648\cdots\cdots)}<0.165$$

以上より，

$\underline{0.115<f\left(\sqrt{2}\right)<0.165\ は示された．(証明終)}$

〔Ⅲ〕

問 1

2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$, $\mathrm{Q}(t-5,\ t^2-4t+2)$ を通る直線の傾きは,

$$\frac{t^2-(t^2-4t+2)}{t-(t-5)}=\frac{4t-2}{5}\quad(=\text{傾き})$$

よって，直線 PQ の方程式は,

$$y=\frac{4t-2}{5}(x-t)+t^2$$

$$\iff y=\frac{4t-2}{5}x+\frac{t^2+2t}{5}$$

したがって，(線分 PQ の方程式) $y=\dfrac{4t-2}{5}x+\dfrac{t^2+2t}{5}$ $(t-5\leqq x\leqq t)$ (答) …… ①

問 2

$$\text{①} \iff t^2+2(2x+1)t-2x-5y=0\quad(x\leqq t\leqq x+5)\ \text{…… ②}$$

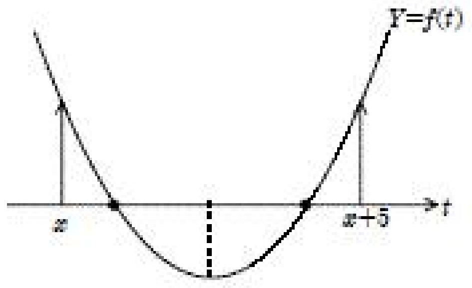
ここで,

$$f(t)=t^2+2(2x+1)t-2x-5y$$
$$=\{t+(2x+1)\}^2-4x^2-6x-1-5y$$

②が $x\leqq t\leqq x+5$ かつ $1\leqq t\leqq 3$ に少なくとも 1 つは実数解をもつ条件を調べればよい.

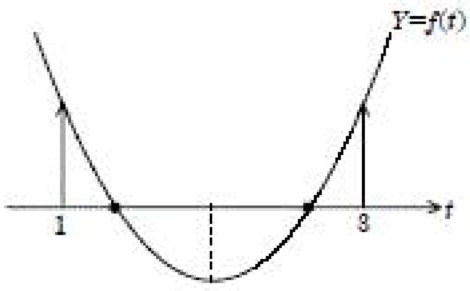
(i) 2 実解（重解も含む）をもつとき,

$$\begin{cases}-4x^2-6x-1-5y\leqq 0\\ x\leqq -2x-1\leqq x+5\\ f(x)=5(x^2-y)\geqq 0\\ f(x+5)=5(x^2+6x+7-y)\geqq 0\end{cases}$$



$$\iff \begin{cases}y\geqq \dfrac{1}{5}(-4x^2-6x-1)\\ -2\leqq x\leqq -\dfrac{1}{3}\\ y\leqq x^2\\ y\leqq x^2+6x+7\end{cases}\quad\text{…… ③}$$

$$\begin{cases}y\geqq \dfrac{1}{5}(-4x^2-6x-1)\\ 1\leqq -2x-1\leqq 3\\ f(1)=2x-5y+3\geqq 0\\ f(3)=10x-5y+15\geqq 0\end{cases}$$



$$\iff \begin{cases}y\geqq \dfrac{1}{5}(-4x^2-6x-1)\\ -2\leqq x\leqq -1\\ y\leqq \dfrac{2}{5}x+\dfrac{3}{5}\\ y\leqq 2x+3\end{cases}\quad\text{…… ④}$$

(ii) 1 実解をもつとき

$$\begin{cases}y\geqq x^2\\ y\leqq x^2+6x+7\end{cases}\ \text{または}\ \begin{cases}y\leqq x^2\\ y\geqq x^2+6x+7\end{cases}\quad\text{…… ⑤}$$

$$\begin{cases}y\geqq \dfrac{2}{5}x+\dfrac{3}{5}\\ y\leqq 2x+3\end{cases}\ \text{または}\ \begin{cases}y\leqq \dfrac{2}{5}x+\dfrac{3}{5}\\ y\geqq 2x+3\end{cases}\quad\text{…… ⑥}$$

以上(i), (ii)より,（③または⑤） かつ （④または⑥） を図示すると，次の図の斜線部分.
（ただし，境界は含まれる）