[I]

問1　帰納的に明らかに $a_n>0$

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{3a_n+1} \iff \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3a_n+1}{a_n}$$

$$\iff \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=3$$

$$\therefore\ \frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)\cdot 3$$

$$=2+3n-3 \qquad \therefore\ a_n=\frac{1}{3n-1}\quad (n=1,2,3,\cdots)\ (答)$$

問2

$$\sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+1} a_{k+2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-1)(3k+2)(3k+5)}$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}-\frac{1}{(3k+2)(3k+5)}\right\}$$

$$=\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{1}{2\cdot5}-\frac{1}{5\cdot8}\right)+\left(\frac{1}{5\cdot8}-\frac{1}{8\cdot11}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}-\frac{1}{(3n+2)(3n+5)}\right)\right\}$$

$$=\frac{n(3n+7)}{20(3n+2)(3n+5)}\ (答)$$

問3

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} a_{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(3n+7)}{20(3n+2)(3n+5)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{7}{n}}{20\left(3+\frac{2}{n}\right)\left(3+\frac{5}{n}\right)}$$

$$=\frac{1}{60}\ (答)$$

[II]

問1 $z=\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$ より $z^7=\left(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)^7$

$$=\cos\pi+i\sin\pi$$

$$=-1 \quad \text{(答)}$$

問2 $z^7+1=\underbrace{(z+1)}_{\neq 0}(z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1)=0 \quad (\because z^7=-1)$

より $z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1=0$

$\therefore z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z=-1$ (答)

問3 $\begin{cases} z=\cos\theta+i\sin\theta \\ \bar{z}=\cos\theta-i\sin\theta \end{cases}$ より $\cos\theta=\dfrac{z+\bar{z}}{2}=\dfrac{z-z^6}{2}$ (答)

$z^6\cdot z=-z\bar{z}$

問4 $\begin{cases} z^2=\cos2\theta+i\sin2\theta \\ \overline{z^2}=\cos2\theta-i\sin2\theta \end{cases}$ より $\cos2\theta=\dfrac{z^2+\overline{z^2}}{2}=\dfrac{z^2-z^5}{2}$ (答)

$z^5\cdot z^2=-z^2\overline{z^2}$

問5 $\begin{cases} z^3=\cos3\theta+i\sin3\theta \\ \overline{z^3}=\cos3\theta-i\sin3\theta \end{cases}$ より $\cos3\theta=\dfrac{z^3+\overline{z^3}}{2}=\dfrac{z^3-z^4}{2}$ (答)

$z^4\cdot z^3=-z^3\overline{z^3}$

問6 $z^7=-1$, $|z|^2=1$ に注意して.
$(z^{14}=1)$

$$\cos\theta\cdot\cos2\theta\cdot\cos3\theta=\frac{1}{8}(z-z^6)(z^2-z^5)(z^3-z^4)$$

$$=\frac{1}{8}(z^3-z^6+z-z^4)(z^3-z^4)$$

$$=\frac{1}{8}(\underbrace{z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1}_{0}+1)$$

$$=\frac{1}{8} \quad \text{(答)}$$

問7 $\cos\theta+\cos3\theta+\cos5\theta=\dfrac{z-z^6}{2}+\dfrac{z^3-z^4}{2}+\dfrac{z^5-z^2}{2}$

$$=-\frac{1}{2}(\underbrace{z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z}_{-1})$$

$$=\frac{1}{2} \quad \text{(答)}$$

[III] ○ $x > \sqrt{\pi}$ のとき、 区間 $[\sqrt{\pi}, x]$ において $f(t) = \dfrac{(t^2+\sqrt{\pi}t)e^{t^2}}{(x-\sqrt{\pi})(t^2+\pi)t^2\log t}$

は連続な関数であり、積分の平均値の定理より、

$$\lim_{x\to\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{\pi}}^{x} f(t)\,dt = \lim_{x\to\sqrt{\pi}} (x-\sqrt{\pi})\cdot f(c) \longleftarrow \left(\begin{array}{l}\text{定数}c\text{は }\sqrt{\pi}<c<x\\ \text{に存在}\end{array}\right)$$

$$= \lim_{x\to\sqrt{\pi}} \cancel{(x-\sqrt{\pi})}\cdot\frac{(c^2+\sqrt{\pi}c)e^{c^2}}{\cancel{(x-\sqrt{\pi})}(c^2+\pi)c^2\log c}$$

$$= \lim_{\substack{x\to\sqrt{\pi}\\(c\to\sqrt{\pi})}} \frac{(c^2+\sqrt{\pi}c)e^{c^2}}{(c^2+\pi)c^2\log c} \longleftarrow (x\to\sqrt{\pi}\text{ のとき、}c\to\sqrt{\pi})$$

$$= \frac{(\pi+\pi)e^{\pi}}{2\pi\cdot\pi\log\sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{2e^{\pi}}{\pi\log\pi} \quad \text{------ ①}$$

○ $x < \sqrt{\pi}$ のとき、 区間 $[x, \sqrt{\pi}]$ において上記と同様に考えて

$$\lim_{x\to\sqrt{\pi}} \left\{-\int_{x}^{\sqrt{\pi}} f(t)\,dt\right\} = -\lim_{x\to\sqrt{\pi}} (\sqrt{\pi}-x)\cdot f(c') \longleftarrow \left(\begin{array}{l}\text{定数}c'\text{は }x<c'<\sqrt{\pi}\\ \text{に存在}\end{array}\right)$$

$$= \lim_{x\to\sqrt{\pi}} \underbrace{(x-\sqrt{\pi})\cdot f(c') = \frac{2e^{\pi}}{\pi\log\pi}}_{\text{(上記と同じ)}} \quad \text{------ ②}$$

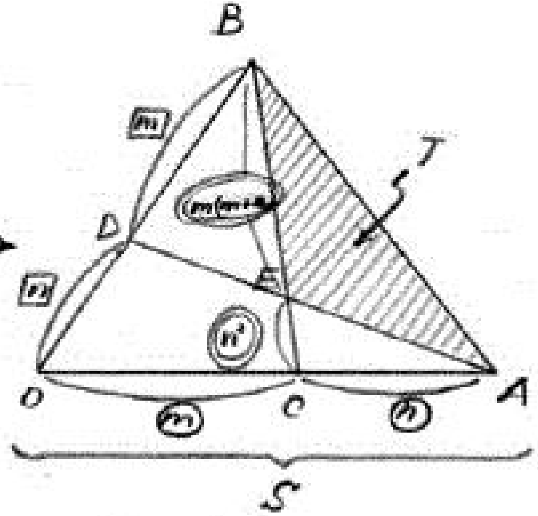
以上①、②より、 $$\lim_{x\to\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{\pi}}^{x} f(t)\,dt = \frac{2e^{\pi}}{\pi\log\pi} \quad \text{(答)}$$

[Ⅳ]

問1 メネラウスの定理より

$$\frac{OA}{AC}\cdot\frac{CE}{EB}\cdot\frac{BD}{DO}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{m+n}{n}\cdot\frac{CE}{EB}\cdot\frac{m}{n}=1 \quad \therefore \frac{CE}{EB}=\frac{n^2}{m(m+n)}$$



面積の割り合を考えて、

$$T=S\cdot\frac{n}{m+n}\cdot\frac{m(m+n)}{m(m+n)+n^2}$$

$$=\frac{mn}{m^2+mn+n^2}\cdot S \quad \therefore \frac{T}{S}=\frac{mn}{m^2+mn+n^2} \text{（答）}$$

問2

$$\frac{T}{S}=\underbrace{\frac{1}{\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+1}\le\frac{1}{2\sqrt{\frac{m}{n}\cdot\frac{n}{m}}+1}}_{\text{（相加・相乗平均）}}=\frac{1}{3} \quad \text{（等号成立は } m=n\text{）}$$

$\therefore M=\frac{1}{3}$（答） ← $(m,n)=(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)$ の6通り

よって、$P(M=\frac{1}{3})=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$（答）

問3 $x=\frac{m}{n}\ (=\frac{1}{6},\cdots,6)$ となるが、$\frac{1}{6}\le x\le 6$ の連続な実数xについて調べることとする。 $f(x)=\frac{1}{x+\frac{1}{x}+1}=\frac{x}{x^2+x+1}\ (\frac{1}{6}\le x\le 6)$ とおく。

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+x+1)-x\cdot(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=\frac{(1+x)(1-x)}{(x^2+x+1)^2}$$

x	$\frac{1}{6}$	……	1	……	6
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$\frac{6}{43}$	↗		↘	$\frac{6}{43}$

よって、

$(\frac{T}{S}$ の最小値$)=\frac{6}{43}$（答）

$\therefore (m,n)=(1,6),(6,1)$（答）

[V]

問1 $p + PF' = 2a \quad (PF' = 2a - p)$

$q + QF' = 2b \quad (QF' = 2b - q)$

余弦定理を各々で用いて、

$p^2 + (2d)^2 - 2 \cdot p \cdot 2d\cos 2\theta = (2a - p)^2$

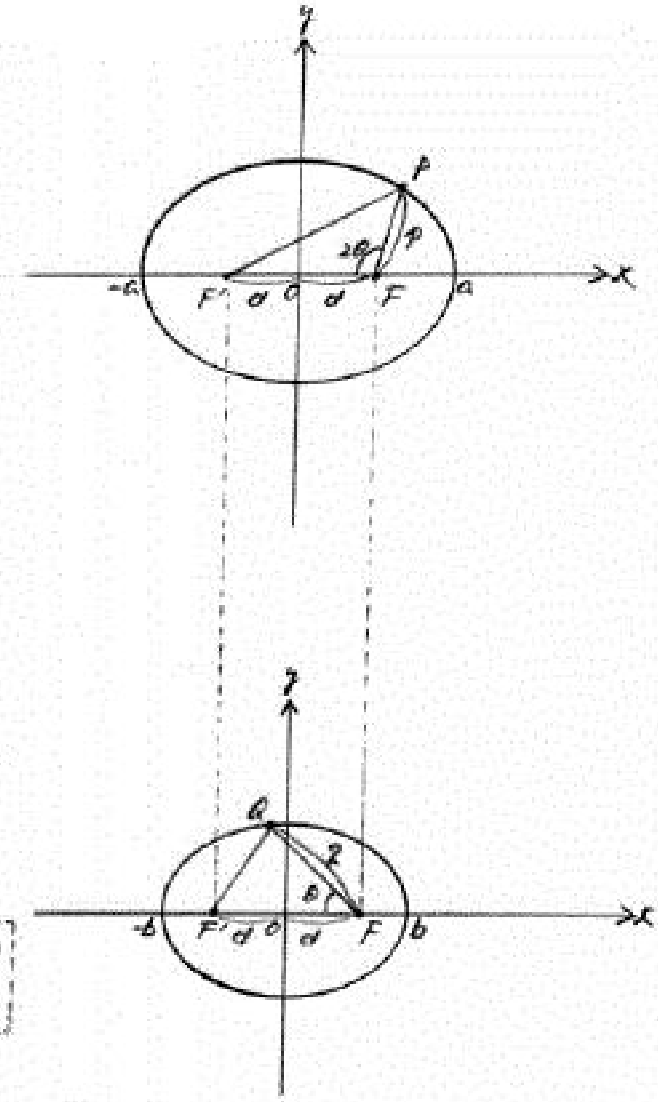
$\Leftrightarrow p^2 + 4d^2 - 4pd\cos 2\theta = 4a^2 - 4ap + p^2$

$\therefore\ p = \dfrac{a^2 - d^2}{a - d\cos 2\theta}$ (答)

$q^2 + (2d)^2 - 2 \cdot q \cdot 2d\cos\theta = (2b - q)^2$

$\Leftrightarrow q^2 + 4d^2 - 4qd\cos\theta = 4b^2 - 4bq + q^2$

$\therefore\ q = \dfrac{b^2 - d^2}{b - d\cos\theta}$ (答)



問2
$$\frac{q}{p} = \frac{\dfrac{b^2-d^2}{b-d\cos\theta}}{\dfrac{a^2-d^2}{a-d\cos 2\theta}} = \underbrace{\frac{b^2-d^2}{a^2-d^2}}_{(+)} \cdot \boxed{\frac{a-d\cos 2\theta}{b-d\cos\theta}}$$

ここで、$x = \cos\theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ より $0 < x < 1$) とし、

$f(x) = \dfrac{a - d(2x^2-1)}{b - dx} = \dfrac{2dx^2 - a - d}{dx - b}$ $(0 < x < 1)$ とおく。

$f'(x) = \dfrac{4dx(dx-b) - (2dx^2 - a - d) \cdot d}{(dx-b)^2}$

$= \dfrac{d(2dx^2 - 4bx + a + d)}{(dx-b)^2}$

$f(x)$ が $0 < x < 1$ で最大値をもつためには、$g(x) = 2dx^2 - 4bx + a + d$ の符号が $(+) \to (-)$ と変わることが必要

$= 2d\left(x - \frac{b}{d}\right)^2 + \cdots \quad (0 < x < 1)$

(軸) $x = \frac{b}{d}$ (>1)

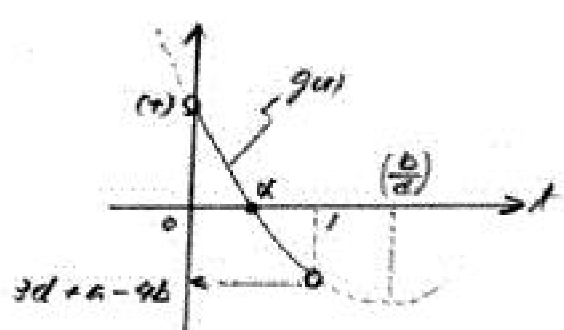
$\begin{cases} g(0) = a + d > 0 \\ g(1) = 3d + a - 4b \end{cases}$

よって、$g(1) = 3d + a - 4b < 0$

$\Leftrightarrow d < \dfrac{4b-a}{3}$

とすれば、$g(x) = 0$ をみたす実数 $x = \alpha$ が $0 < x < 1$ にただ1つ存在する。

このとき、



x	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	(1)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\left(\frac{a+d}{b}\right)$	$\nearrow$	(最大)	$\searrow$	$\left(\frac{a-d}{b-d}\right)$

となり、最大値をとり十分。　よって求める条件は　$(0<)\, d < \dfrac{4b-a}{3}$ (答)

問3 (i) $g(1) = 3d + a - 4b < 0$ $\left(d < \frac{4b-a}{3}\right)$ のとき、

問2より最大値は存在せず。

(ii) $g(1) = 3d + a - 4b \geqq 0$ $\left(d \geqq \frac{4b-a}{3}\right)$ のとき、

$g(x) \geqq 0$ より、$f'(x) \geqq 0$ となり $f(x)$ は $0 < x < 1$ で単調増加。

$0 < x < 1$ より $x \neq 0$ より最大値は存在せず。

以上(i),(ii)より題意は示された (証明終)