[Ⅰ]　$x^3+6x^2-px-q=0$ の異なる3実解を $x=\alpha,\beta,4$　$(\alpha\neq4,\beta\neq4,\alpha\neq\beta)$

解と係数の関係により，

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-10\\ \alpha\beta+4(\alpha+\beta)=-p\\ 4\alpha\beta=q\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=-10\\ \alpha\beta=40-p\quad\cdots\cdots①\\ \alpha\beta=\dfrac{q}{4}\end{cases}$$

$x=\alpha,\beta,4$ は適当に並べると等比数列であることと①より，　$\underset{(+)}{\alpha},\underset{(-)}{\beta},\underset{(+)}{4}$

または，$\underset{(-)}{\alpha},\underset{(+)}{4},\underset{(-)}{\beta}$ について考える.（α と β は文字の対称性あり）

(i)　$\underset{(+)}{\alpha},\underset{(-)}{\beta},\underset{(+)}{4}$ のとき，

$$\begin{aligned}&\beta^2=4\alpha\\ \Leftrightarrow\quad&\beta^2+4\beta=-40\\ \Leftrightarrow\quad&\beta^2+4\beta+40=0\quad D/4<0\text{となり不適}\end{aligned}$$

(ii)　$\underset{(-)}{\alpha},\underset{(+)}{4},\underset{(-)}{\beta}$ のとき，　$16=\alpha\beta$

①より，$\begin{cases}\alpha+\beta=-10\\ \alpha\beta=16\end{cases}$　$\therefore\ (\alpha,\beta)=(-2,-8),(-8,-2)$

$(p=24,q=64)$

以上　(i)，(ii)より，残りの2解 $x=-2,-8,p=24,q=64$　　（答）

[II]

問 1　$\mathrm{A}(a, a^2), \mathrm{B}(b, b^2), \mathrm{C}(c, c^2)$ とする．

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (b-a, b^2-a^2), \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (c-a, c^2-a^2)$ より

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\left|(b-a)(c^2-a^2)-(c-a)(b^2-a^2)\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right| \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

問 2　$1 \leqq a < b < c \leqq 6$ としてもよい．

(i) 最大値について，$a=1, c=6$ で調べればよい．

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{5}{2}\left|(1-b)(b-6)\right| \\
&= \frac{5}{2}\left|-b^2+7b-6\right| \\
&= \frac{5}{2}\left|-\left(b-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{25}{4}\right| \qquad b=3,4 \text{ のとき } S_{\max.}=15 \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

(ii) 最小値について，$(a, b, c) = \underset{S=1}{\underset{\downarrow}{(1, 2, 3)}}, \underset{S=1}{\underset{\downarrow}{(2, 3, 4)}}, \underset{S=1}{\underset{\downarrow}{(3, 4, 5)}}, \underset{S=1}{\underset{\downarrow}{(4, 5, 6)}}$ で調べればよい．

いずれにせよ $S_{\min.}=1$　　(答)

問 3

(a,b,c)	(1, 2, 3)	(1, 2, 4)	(1, 2, 5)	(1, 2, 6)	(1, 3, 4)	(1, 3, 5)	(1, 3, 6)	(1, 4, 5)	(1, 4, 6)	(1, 5, 6)	(2, 3, 4)
Sの値	1	3	° 6	° 10	3	° 8	15	° 6	15	° 10	1

(a,b,c)	(2, 3, 5)	(2, 3, 6)	(2, 4, 5)	(2, 4, 6)	(2, 5, 6)	(3, 4, 5)	(3, 4, 6)	(3, 5, 6)	(4, 5, 6)
Sの値	3	° 6	3	° 8	° 6	1	3	3	1

よって，$\dfrac{8}{20}=\dfrac{2}{5}$　(答)

［Ⅲ］　$f(x)=\log(x+1)+\underbrace{\int_0^x f(x-t)\sin t\,dt}_{②}\qquad (x>-1)\ \cdots\cdots①$

②で，　$x-t=u \qquad \therefore\ -dt=du$

$$\begin{array}{c|ccc} t & 0 & \to & x \\ \hline u & x & \to & 0 \end{array}$$

$$(②)=\int_x^0 f(u)\sin(x-u)\cdot(-1)\,du=\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt$$

$$① \Leftrightarrow\quad f(x)=\log(x+1)+\int_0^x f(t)(\sin x\cos t-\cos x\sin t)\,dt$$
$$=\log(x+1)+\sin x\int_0^x f(t)\cos t\,dt-\cos x\int_0^x f(t)\sin t\,dt\ \cdots\cdots①'$$

①′ の辺々を x で微分して，

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}+\cos x\int_0^x f(t)\cos t\,dt+\sin x\cdot f(x)\cos x+\sin x\int_0^x f(t)\sin t\,dt$$
$$-\cos x\cdot f(x)\sin x$$

$$\Leftrightarrow\quad f'(x)=\frac{1}{x+1}+\cos x\int_0^x f(t)\cos t\,dt+\sin x\int_0^x f(t)\sin t\,dt\ \cdots\cdots③$$

③の辺々を x で微分して，

$$f''(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}-\sin x\int_0^x f(t)\cos t\,dt+\cos x\cdot f(x)\cos x+\cos x\int_0^x f(t)\sin t\,dt$$
$$+\sin x\cdot f(x)\sin x\ \cdots\cdots④$$

①′，④より，

$$f''(x)+f(x)=\log(x+1)-\frac{1}{(x+1)^2}+f(x)$$

$$\therefore\ f''(x)=\log(x+1)-\frac{1}{(x+1)^2}$$

よって，

$$f'(x)=\int\left\{\log(x+1)-\frac{1}{(x+1)^2}\right\}dx$$
$$=(x+1)\log(x+1)-x+\frac{1}{x+1}+c_1$$

$f'(0)=1+c_1=1 \qquad \therefore\ c_1=0$

$$\therefore\ f'(x)=(x+1)\log(x+1)-x+\frac{1}{x+1}$$

よって，

$$f(x)=\int\left\{(x+1)\log(x+1)-x+\frac{1}{x+1}\right\}dx$$
$$=\frac{1}{2}(x+1)^2\log(x+1)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)-\frac{x^2}{2}+\log(x+1)+c_2$$
$$=\frac{1}{2}(x+1)^2\log(x+1)+\log(x+1)-\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x+c_2$$

$f(0)=c_2=0 \qquad \therefore\ c_2=0$

$$\therefore\ f(x)=\frac{1}{2}(x+1)^2\log(x+1)+\log(x+1)-\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x\quad(x>-1)\qquad(答)$$

[IV]

問1　$w=\dfrac{1}{|z|^2-2z}\quad (z\neq 0,2)$

$z=x+yi$ （x, y は実数）とおくと，

$$\begin{aligned}|z|^2-2z&=x^2+y^2-2(x+yi)\\&=x^2+y^2-2x-2yi\end{aligned}$$

よって，

$$w=\frac{x^2+y^2-2x+2yi}{(x^2+y^2-2x)^2+4y^2}$$

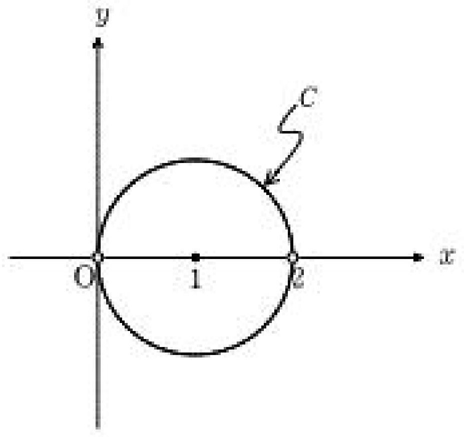
ここで

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(w)=0 &\iff x^2+y^2-2x=0\\&\iff (x-1)^2+y^2=1\end{aligned}$$

ただし，　$\mathrm{Im}(w)\neq 0$ より　$y\neq 0$

図示すると右図のとおり．

z は1を中心，半径1の円を描く．（ただし，$z\neq 0, 2$）



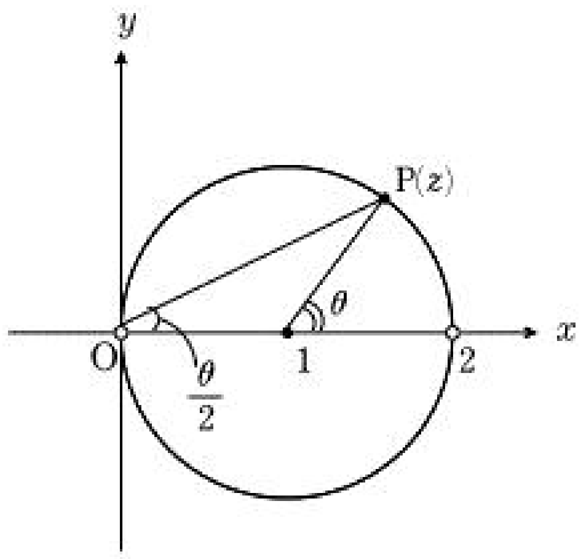
問2　$\mathrm{P}(z)$ に対して，$\mathrm{Q}(z^2)$ とし，$\mathrm{R}\left(\dfrac{5}{6}\right)$ とする．

右図の角 θ　$(0<\theta<\pi)$ とおく．

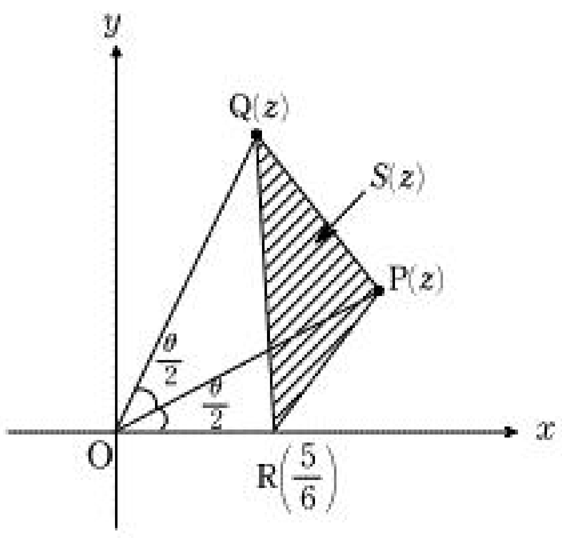
$z=1+\cos\theta+i\sin\theta$ と表せて，

$$\begin{aligned}z&=2\cos^2\frac{\theta}{2}+2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\\&=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z^2&=4\cos^2\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\\&=4\cos^2\frac{\theta}{2}(\cos\theta+i\sin\theta)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}S(z)&=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot 2\cos\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\cdot 2\cos\frac{\theta}{2}\cdot 4\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}\\&\qquad-\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot 4\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\sin\theta\\&=\frac{5}{12}\sin\theta+2\cdot\sin\theta\cdot\frac{1+\cos\theta}{2}-\frac{5}{3}\sin\theta\cdot\frac{1+\cos\theta}{2}\\&=\frac{1}{12}\sin\theta(2\cos\theta+7)=T(\theta)\quad(0<\theta<\pi)\end{aligned}$$



ここで，

$$\begin{aligned}T'(\theta)&=\frac{1}{12}\cos\theta(2\cos\theta+7)+\frac{1}{12}\sin\theta\cdot(-2\sin\theta)\\&=\frac{1}{12}\left\{2\cos^2\theta+7\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)\right\}\\&=\frac{1}{12}(4\cos^2\theta+7\cos\theta-2)\\&=\underbrace{\frac{1}{12}}_{(+)}(4\cos\theta-1)\underbrace{(\cos\theta+2)}_{(+)}\end{aligned}$$

$\cos\theta=\dfrac{1}{4}$ をみたす実数 θ は $0<\theta<\pi$ にただ1つ存在し，それを α とくと，

$$\cos\alpha=\frac{1}{4}\qquad\left(\sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$$

θ	(0)	……	α	……	(π)
$T'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$T(\theta)$		↗	（最大）	↘	

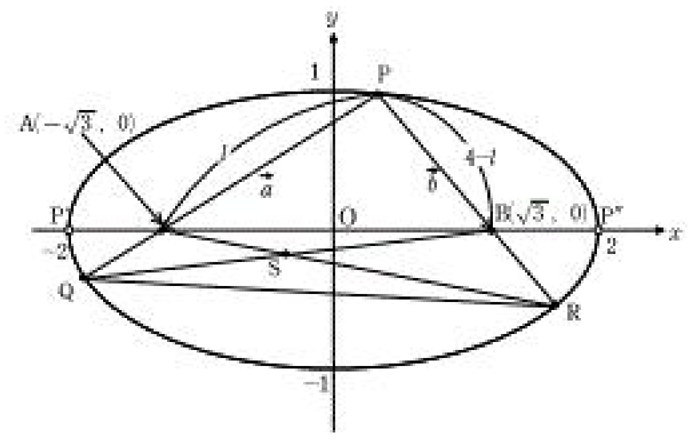
$\theta=\alpha$ にて $T(\theta)$ （つまり $S(z)$）は最大となる．

このとき

$$\begin{aligned}z&=1+\cos\alpha+i\sin\alpha\\&=\underbrace{\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{15}}{4}i\qquad\qquad\therefore\ z=\frac{5}{4}}_{\text{(図形の対称性より)}}\pm\frac{\sqrt{15}}{4}i\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{\max.}=T(\alpha)&=\frac{1}{12}\sin\alpha(2\cos\alpha+7)\\&=\frac{1}{12}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}\left(\frac{1}{2}+7\right)\\&=\frac{5\sqrt{15}}{32}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

［V］　$\mathrm{A}\left(-\sqrt{3},0\right),\mathrm{B}\left(\sqrt{3},0\right)$ とし，座標軸にあてはめて考える．



楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1 \quad \cdots\cdots ①$$

問1　点Pが図中の P′, P″ にある場合を考えて

（ただし，Pは x 軸（長軸）上にないことに注意）

$$2-\sqrt{3}<l<2+\sqrt{3} \qquad \text{（答）}$$

問2

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(1+s)\overrightarrow{\mathrm{PA}} \iff \overrightarrow{\mathrm{PQ}}-\overrightarrow{\mathrm{PA}}=s\overrightarrow{\mathrm{PA}} \iff \overrightarrow{\mathrm{AQ}}=-s\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

$$\therefore\ \underline{\underline{\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|=sl}}$$

これより，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|=l+sl=(1+s)l$

さらに，$\left|\overrightarrow{\mathrm{QB}}\right|=4-\left|\overrightarrow{\mathrm{QA}}\right|=4-sl$

$$\therefore\ \cos\angle\mathrm{PAB}=\frac{l^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2-(4-l)^2}{2l\cdot2\sqrt{3}}=\frac{2l-1}{\sqrt{3}l}$$

$\left(l\to sl\ \text{に置き換える}\right)$

$$\therefore\ \cos\angle\mathrm{BAQ}=\frac{2sl-1}{\sqrt{3}sl}$$

ここで，$\angle\mathrm{PAB}+\angle\mathrm{BAQ}=\pi$ より，

$$\begin{aligned}
&\cos\angle\mathrm{PAB}=\cos(\pi-\angle\mathrm{BAQ})\\
\iff\ &\cos\angle\mathrm{PAB}=-\cos\angle\mathrm{BAQ}\\
\iff\ &\cos\angle\mathrm{PAB}+\cos\angle\mathrm{BAQ}=0\\
\iff\ &\frac{2l-1}{\sqrt{3}\,l}+\frac{2sl-1}{\sqrt{3}\,sl}=0\\
\iff\ &4sl-s-1=0\quad\therefore\ s=\frac{1}{4l-1}\qquad\text{（答）}
\end{aligned}$$

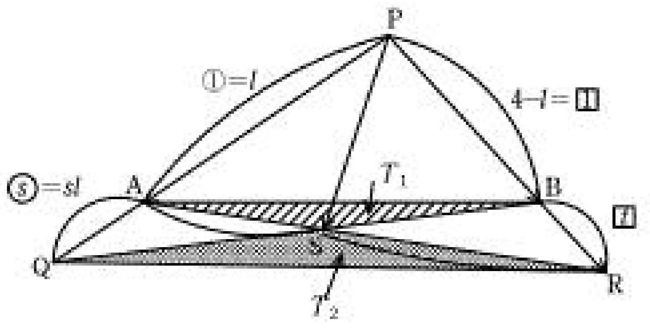
次に，$s\to t,\ l\to4-l$ に置き換えると，

$$t=\frac{1}{4(4-l)-1}=\frac{1}{15-4l}\qquad\text{（答）}$$

問3　メネラウスの定理を用いると

$$\frac{1+s}{s}\cdot\frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{SR}}\cdot\frac{t}{1}=1$$

$$\iff\ \frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{SR}}=\frac{s}{(1+s)t}=\frac{\dfrac{1}{4l-1}}{\left(1+\dfrac{1}{4l-1}\right)\cdot\dfrac{1}{15-4l}}\ (\because\ \text{問2より})=\frac{15-4l}{4l}$$



これより，

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{PS}}&=\frac{4l\overrightarrow{\mathrm{PA}}+(15-4l)\overrightarrow{\mathrm{PR}}}{(15-4l)+4l}\\
&=\frac{1}{15}\left\{4l\vec{a}+(15-4l)\cdot\frac{16-4l}{15-4l}\vec{b}\right\}\\
&=\frac{4l}{15}\vec{a}+\frac{16-4l}{15}\vec{b}\quad\left(=u\vec{a}+v\vec{b}\right)
\end{aligned}$$

$\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0},\ \vec{a}\nparallel\vec{b}$ より，

$$u=\frac{4l}{15},\ v=\frac{16-4l}{15}\qquad\text{（答）}$$

問4

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{SR}}\cdot\frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{SQ}}=\frac{15-4l}{4l}\cdot\boxed{\frac{4l-1}{16-4l}}=\frac{-16l^2+64l-15}{16l(4-l)}=\frac{3}{8}$$

↑

（問3と同様にメネラウスの定理を用いると $\dfrac{\mathrm{BS}}{\mathrm{SQ}}=\dfrac{4l-1}{16-4l}$）

$$\begin{aligned}
\iff\ &-128l^2+512l-120=192l-48l^2\\
\iff\ &80l^2-320l+120=0\\
\iff\ &2l^2-8l+3=0\\
&\therefore\ l=\frac{4\pm\sqrt{10}}{2}\ \left(\text{問1の範囲をみたす}\right)\quad\text{（答）}
\end{aligned}$$