

〔I〕

問 1

$a=1$ のとき

$$C_1: x^2 - y^2 = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$C_2: y = x^2 - \frac{3}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①と②を連立して、

$$\begin{aligned} y + \frac{3}{4} - y^2 &= 1 &\iff y^2 - y + \frac{1}{4} &= 0 \\ &&\iff \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= 0 \quad \therefore y = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

このとき、②より、 $x^2 = \frac{5}{4}$ 、求める共有点の座標は、 $\left(\pm \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (答)

問 2

$$C_1: x^2 - y^2 = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$C_2: y = ax^2 - \frac{3}{2a+2} \quad \cdots \cdots \textcircled{4} \quad (\text{ただし, } a \neq 0, -1)$$

③と④を連立して、

$$y = a(y^2 + 1) - \frac{3}{2a+2} \iff ay^2 - y + a - \frac{3}{2a+2} = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

⑤が異なる 2 実解をもつ必要があるため、

$$\begin{aligned} D &= 1 - 4a\left(a - \frac{3}{2a+2}\right) > 0 \\ \iff \frac{2a(2a^2 + 2a - 3)}{a+1} &< 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{6} \end{aligned}$$

(i) $a > -1$ ($a \neq 0$) のとき

$$\textcircled{6} \iff 4a^3 + 4a^2 - 7a - 1 < 0$$

$$\iff (a-1)(4a^2 + 8a + 1) < 0 \quad \therefore a < \frac{-2-\sqrt{3}}{2}, \frac{-2+\sqrt{3}}{2} < a < 1$$

$$\text{ここで, } a > -1 \text{ (} a \neq 0 \text{) より, } \underline{\underline{\frac{-2+\sqrt{3}}{2} < a < 0, 0 < a < 1}}$$

(ii) $a < -1$ のとき

$$\textcircled{6} \iff (a-1)(4a^2 + 8a + 1) > 0 \quad \therefore \frac{-2-\sqrt{3}}{2} < a < \frac{-2+\sqrt{3}}{2}, 1 < a$$

$$\text{ここで, } a < -1 \text{ より, } \underline{\underline{\frac{-2-\sqrt{3}}{2} < a < -1}}$$

以上(i), (ii)より、 C_1 と C_2 が相異なる 4 点で交わるための必要十分条件は、

$$\underline{\underline{\frac{-2-\sqrt{3}}{2} < a < -1, \frac{-2+\sqrt{3}}{2} < a < 0, 0 < a < 1}} \quad (\text{答})$$

問 3 ③と④を用いて、 C_1 と C_2 が相異なる 4 つの交点を通る曲線の方程式は、

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - 1 + k\left(y - ax^2 + \frac{3}{2a+2}\right) &= 0 \\ \iff (1-ka)x^2 - y^2 + ky + \frac{3k-2a-2}{2a+2} &= 0 \\ \iff (ka-1)x^2 + \left(y - \frac{k}{2}\right)^2 &= \frac{k^2}{4} + \frac{3k-2a-2}{2a+2} \quad \cdots \cdots \textcircled{7} \end{aligned}$$

と表せる。ここで、 $ka-1=1$ つまり、 $k=\frac{2}{a}$ が必要であり、

このとき、

$$\textcircled{7} \iff \underline{\underline{x^2 + \left(y - \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{-a^3 - a^2 + 4a + 1}{a^2(a+1)}}}$$

(右辺) $= \frac{-a^3 - a^2 + 4a + 1}{a^2(a+1)}$ は問 2 で求めた

$\frac{-2-\sqrt{3}}{2} < a < -1, \frac{-2+\sqrt{3}}{2} < a < 0, 0 < a < 1$ の範囲でつねに正の実数。

よって、円の中心座標 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 、(半径) $= r = \sqrt{\frac{-a^3 - a^2 + \overset{(7)}{4}a + \overset{(4)}{1}}{a^{\overset{(6)}{2}}\left(a + \overset{(3)}{1}\right)}} \quad (\text{答})$

【Ⅱ】

問1 l の最大は、半径1の円に内接する

正三角形のときだから、

$$\frac{x}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2 \cdot 1 \iff x = \sqrt{3}$$

$$\therefore 0 < l \leq \sqrt{3} \quad (\text{答})$$

問2 実数 u, v を用いて、

$$\overrightarrow{AH} = u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC} \text{ と表せる. } (\overrightarrow{AB} \text{ と } \overrightarrow{AC} \text{ は 1 次独立})$$

ここで、

$$\begin{cases} |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = l \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{l^2}{2} \\ \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = s, \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = t \end{cases}$$

$$\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{AB} = (u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) \cdot \overrightarrow{AB} = l^2 u + \frac{l^2}{2} v - s = 0 \quad \cdots \cdots ①$$

$$\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{AC} = (u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{l^2}{2} u + l^2 v - t = 0 \quad \cdots \cdots ②$$

①, ②より、

$$u = \frac{2(2s-t)}{3l^2}, v = \frac{2(2t-s)}{3l^2}$$

$$\therefore \overrightarrow{AH} = \frac{2(2s-t)}{3l^2} \overrightarrow{AB} + \frac{2(2t-s)}{3l^2} \overrightarrow{AC} \quad (\text{答})$$

問3

$$\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} + \left(\frac{t}{l^2} - \frac{1}{3} \right) \overrightarrow{AC} \quad (\because 2s-t=l^2)$$

③~~~~~

正三角形 ABC の外接円の中心を O' とすると、点 H は、

AB を $2:1$ に内分する点 H_0 を通り、 AC に平行な直線上にある、

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} l^2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \quad (\text{一定}) \text{ より、}$$

$|\overrightarrow{PH}|$ を大きくしたとき、四面体の体積(V)は最大となるので、点 H が図の点 H' のときとわかる。

このときの点 P を点 P' とおく。

$$O'H' = \frac{l}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} l$$

$$OO' = \sqrt{1^2 - \left(\frac{l}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{2}{3} \right)^2} = \sqrt{1 - \frac{l^2}{3}}$$

よって、

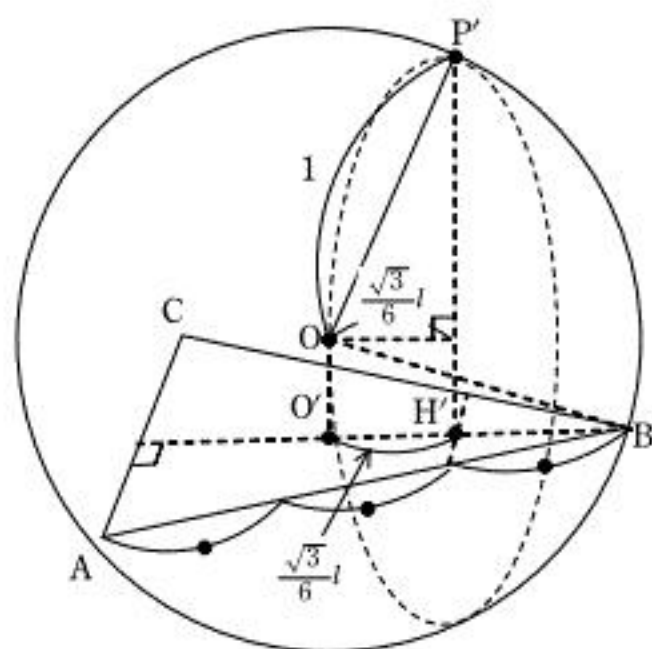
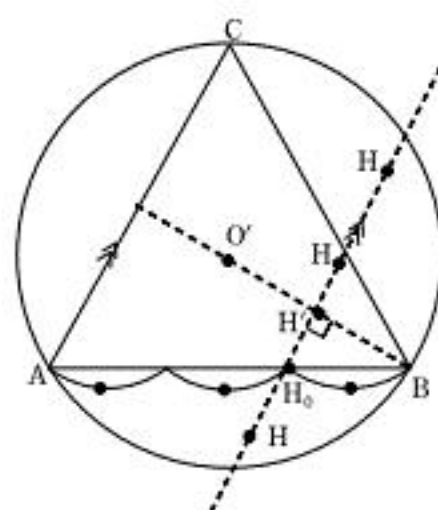
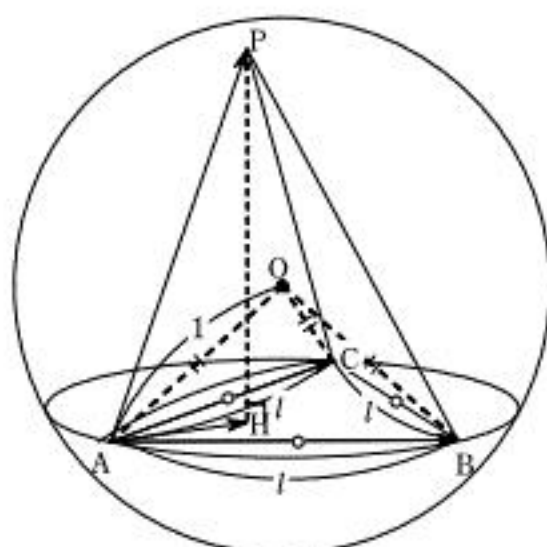
$$P'H' = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6} l \right)^2} + \sqrt{1 - \frac{l^2}{3}}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{l^2}{12}} + \sqrt{1 - \frac{l^2}{3}}$$

よって、求める最大の体積 $V(l)$ は、

$$V(l) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{l^2}{12}} + \sqrt{1 - \frac{l^2}{3}} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{12} l^2 \left(\sqrt{1 - \frac{l^2}{12}} + \sqrt{1 - \frac{l^2}{3}} \right) \quad (\text{答})$$



【Ⅲ】
問 1

$$g(x)=\log(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right) \quad (0\leq x\leq k) \text{ とおく.}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{1+x} - 1 + x \\ &= \frac{x^2}{1+x} \geq 0 \end{aligned}$$

$$y=g(x) \text{ は, } 0\leq x\leq k \text{ において単調増加,} \qquad g(x)\geq g(0)=0 \quad \cdots\cdots\textcircled{1}$$

$$h(x)=x-\frac{1}{k+1}\cdot\frac{x^2}{2}-\log(1+x) \quad (0\leq x\leq k) \text{ とおく.}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= 1-\frac{x}{k+1}-\frac{1}{1+x} \\ &= \frac{x(k-x)}{(1+x)(1+k)} \geq 0 \end{aligned}$$

$$y=h(x) \text{ は, } 0\leq x\leq k \text{ において単調増加,} \qquad h(x)\geq h(0)=0 \quad \cdots\cdots\textcircled{2}$$

以上①, ②により,

$$x-\frac{x^2}{2}\leq \log(1+x)\leq x-\frac{1}{k+1}\cdot\frac{x^2}{2} \quad (0\leq x\leq k) \text{ は示された. (証明終)}$$

問 2 $f(x)=\log(1+x^2) \quad (x>0)$ より,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{1+x^2} \\ f''(x) &= \frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

関数 $f(x)$ は連続, 微分可のため, 平均値の定理より,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}=f'(\underbrace{c}_{0<a<c<a+h<1})$$

をみたす実数 c は少なくとも 1 つは存在する.

ここで, $0<x<1$ において, $f''(x)>0$ より, $y=f'(x)$ は単調増加より, $a<c<a+h$ の実数 c はただ 1 つに決定される (一意性).

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &\iff f(a+h)-f(a)=f'(c)\cdot h \\ &\iff f(a+h)=f(a)+f'(c)\cdot h \end{aligned}$$

となり, 題意は示された (証明終).

次に,

$$\begin{aligned} d &= \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ \iff d &= f'(c) \\ \iff d &= \frac{2c}{1+c^2} \\ \iff dc^2-2c+d &= 0 \quad \left(d = \frac{2c}{1+c^2}, 0<a<\underbrace{c<a+h<1}_{\text{より}}, d>0 \right) \\ \therefore c &= \frac{1\pm\sqrt{1-d^2}}{d} \end{aligned}$$

ここで,

$$d = \frac{2c}{1+c^2} = \frac{2}{\frac{1}{c}+c} \leq \frac{2}{2\sqrt{\frac{1}{c}\cdot c}} = 1$$

(図 1: 相乗平均)

$$\underbrace{0<c<1}_{\text{より}}, \text{ 等号は成立せず } 0<d<1 \quad \therefore c = \frac{1-\sqrt{1-d^2}}{d} \quad (\text{答})$$

問 3

$$\begin{aligned} \theta(h) &= \frac{c(h)-a}{h} \\ &= \frac{1}{h} \left(\frac{1-\sqrt{1-d^2}}{d} - a \right) \\ &= \frac{1-\sqrt{1-d^2}-ad}{hd} \\ &= \frac{(1-ad)^2-(1-d^2)}{hd(1-ad+\sqrt{1-d^2})} \\ &= \frac{(1+a^2)d-2a}{h(1-ad+\sqrt{1-d^2})} \\ &= (1+a^2) \cdot \frac{d-\underbrace{\frac{2a}{1+a^2}}_{=f'(a)}}{h} \cdot \frac{1}{1-ad+\sqrt{1-d^2}} \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \lim_{h\rightarrow+0} \frac{d-f'(a)}{h} &= \lim_{h\rightarrow+0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) \right\} \\ &= \lim_{h\rightarrow+0} \frac{1}{h^2} \left\{ \log(1+(a+h)^2) - \log(1+a^2) - \frac{2ah}{1+a^2} \right\} \\ &= \lim_{h\rightarrow+0} \frac{1}{h^2} \left\{ \log\left(1+\frac{(2a+h)h}{1+a^2}\right) - \frac{2ah}{1+a^2} \right\} \end{aligned}$$

ここで, 問 1 の結果に, $x=k=\frac{(2a+h)h}{1+a^2}>0$ を代入すると,

$$\begin{aligned} &\frac{(2a+h)h}{1+a^2} - \frac{(2a+h)^2 h^2}{2(1+a^2)^2} \leq \log\left(1+\frac{(2a+h)h}{1+a^2}\right) \leq \frac{(2a+h)h}{1+a^2} - \frac{(2a+h)^2 h^2}{2(k+1)(1+a^2)^2} \\ \iff &\frac{h^2}{1+a^2} - \frac{(2a+h)^2 h^2}{2(1+a^2)^2} \leq \log\left(1+\frac{(2a+h)h}{1+a^2}\right) - \frac{2ah}{1+a^2} \leq \frac{h^2}{1+a^2} - \frac{(2a+h)^2 h^2}{2(k+1)(1+a^2)^2} \\ \iff &\frac{1}{1+a^2} - \frac{(2a+h)^2}{2(1+a^2)^2} \leq \frac{1}{h^2} \left\{ \log\left(1+\frac{(2a+h)h}{1+a^2}\right) - \frac{2ah}{1+a^2} \right\} \leq \frac{1}{1+a^2} - \frac{(2a+h)^2}{2(k+1)(1+a^2)^2} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\frac{1}{1+a^2}} \right)_{(h>0)}$$

$$\begin{aligned} (\text{最左辺}) &\rightarrow \frac{1}{1+a^2} - \frac{2a^2}{(1+a^2)^2} = \frac{1-a^2}{(1+a^2)^2} \quad (h\rightarrow+0, \text{つまり}, k\rightarrow+0) \\ (\text{最右辺}) &\end{aligned}$$

さらに,

$$\begin{aligned} &\lim_{h\rightarrow+0} \frac{1}{1-ad+\sqrt{1-d^2}} \\ &= \frac{1}{1-af'(a)+\sqrt{1-\{f'(a)\}^2}} \quad \left(f'(a) = \frac{2a}{1+a^2} \right) \\ &= \frac{1+a^2}{2(1-a^2)} \end{aligned}$$

以上より,

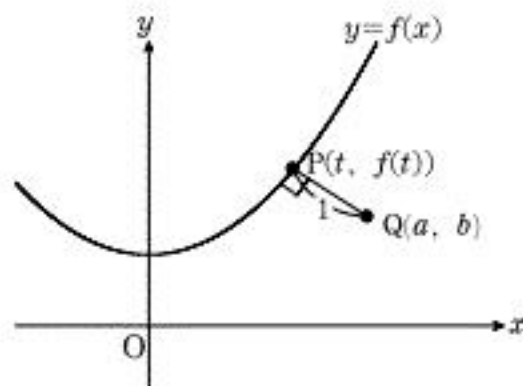
$$\begin{aligned} \lim_{h\rightarrow+0} \theta(h) &= (1+a^2) \cdot \frac{1-a^2}{(1+a^2)^2} \cdot \frac{1+a^2}{2(1-a^2)} \\ &= \frac{1}{2} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(注) $\lim_{h\rightarrow+0} \blacksquare$ を $\lim_{k\rightarrow+0} \blacksquare$ と表記してあります.

[IV]

問1 点 $P(t, f(t))$ での接ベクトルは、 $P(t, f(t))$ より、

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}}(f'(t), -1) \quad (\text{答})$$



問2

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= (a, b) = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} \\ &= (t, f(t)) + \frac{1}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}}(f'(t), -1) \\ \therefore Q: &\begin{cases} a = t + \frac{f'(t)}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}} \\ b = f(t) - \frac{1}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}} \end{cases} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

問3

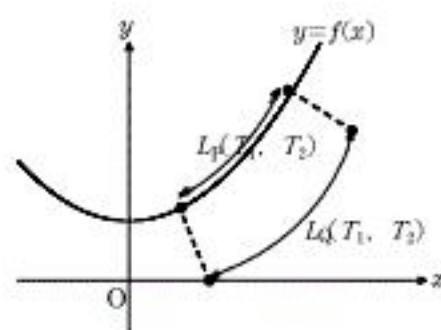
$$\begin{cases} a(t) = t + \frac{f'(t)}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}} \\ b(t) = f(t) - \frac{1}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}} \end{cases} \quad \text{より,}$$

$$\begin{aligned} a'(t) &= 1 + \frac{f''(t)\sqrt{1+\{f'(t)\}^2} - f'(t) \cdot \frac{f'(t)f''(t)}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}}}{1+\{f'(t)\}^2} \\ &= 1 + \frac{f''(t)(1+\{f'(t)\}^2) - \{f'(t)\}^2 f''(t)}{(1+\{f'(t)\}^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= 1 + \frac{f''(t)}{(1+\{f'(t)\}^2)^{\frac{3}{2}}} \\ b'(t) &= f'(t) + \frac{f'(t)f''(t)}{(1+\{f'(t)\}^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

より、 $b'(t) = f'(t) \cdot a'(t)$ (証明終)

問4

$$\begin{aligned} L_P(T_1, T_2) &= \int_{T_1}^{T_2} \sqrt{1+\{f'(x)\}^2} dx \\ &= \int_{T_1}^{T_2} \sqrt{1+\{f'(t)\}^2} dt \\ L_Q(T_1, T_2) &= \int_{T_1}^{T_2} \sqrt{\{a'(t)\}^2 + \{b'(t)\}^2} dt \\ &= \int_{T_1}^{T_2} \sqrt{\{a'(t)\}^2 + \{f'(t)\}^2 \{a'(t)\}^2} dt \quad (a'(t) > 0) \\ &= \int_{T_1}^{T_2} \sqrt{1+\{f'(t)\}^2} a'(t) dt \end{aligned}$$



ここで、

$$\begin{aligned} \Delta L(T_1, T_2) &= L_Q(T_1, T_2) - L_P(T_1, T_2) \\ &= \int_{T_1}^{T_2} \sqrt{1+\{f'(t)\}^2} a'(t) dt - \int_{T_1}^{T_2} \sqrt{1+\{f'(t)\}^2} dt \\ &= \int_{T_1}^{T_2} \sqrt{1+\{f'(t)\}^2} \cdot \frac{f''(t)}{(1+\{f'(t)\}^2)^{\frac{3}{2}}} dt \\ &= \int_{T_1}^{T_2} \frac{f''(t)}{1+\{f'(t)\}^2} dt \quad (\text{証明終}) \end{aligned}$$

問5 $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ のとき、 $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $f''(x) = f(x) \geq 0$ (条件をみtas)

$$\begin{aligned} \Delta L(T_1, T_2) &= \int_{T_1}^{T_2} \frac{f''(t)}{1+\{f'(t)\}^2} dt \\ &= \int_{T_1}^{T_2} \frac{f(t)}{\{f(t)\}^2} dt \quad (f''(t) = f(t), 1+\{f'(t)\}^2 = \{f(t)\}^2) \\ &= \int_{T_1}^{T_2} \frac{dt}{f(t)} \\ &= \int_{T_1}^{T_2} \frac{2}{e^t + e^{-t}} dt \\ &= \int_{T_1}^{T_2} \frac{2e^t}{e^{2t} + 1} dt \quad \left(\begin{array}{l} e^t = u \quad \therefore e^t dt = du \\ \frac{t}{u} \Big|_{e^{T_1}} \rightarrow \frac{T_2}{e^{T_2}} \end{array} \right) \\ &= \int_{e^{T_1}}^{e^{T_2}} \frac{2}{u^2 + 1} du \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{2}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \quad \left(\begin{array}{l} u = \tan \theta \quad \therefore du = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ \frac{u}{\theta} \Big|_{e^{T_1}} \rightarrow \frac{e^{T_2}}{\theta_2} \end{array} \right) \\ &= 2(\theta_2 - \theta_1) \quad \left(\begin{array}{l} \lim_{T_1 \rightarrow -\infty} e^{T_1} = 0 \quad \text{より} \quad \theta_1 \rightarrow +0 \\ \lim_{T_2 \rightarrow +\infty} e^{T_2} = +\infty \quad \text{より} \quad \theta_2 \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0 \end{array} \right) \\ \therefore \lim_{\substack{T_1 \rightarrow -\infty \\ T_2 \rightarrow +\infty}} \Delta L(T_1, T_2) &= 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi \quad (\text{答}) \end{aligned}$$