

【Ⅰ】

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ	
2	4	2	2	2	
カ	キ	ク	ケ	コ	サ
2	2	2	2	26	13

【解説】

(1)

$$w = \frac{(4+2i)z+4-4i}{z+2-2i}$$

$$\Leftrightarrow w = 4+2i - \frac{8}{z+2-2i}$$

であるため、 $w \neq 4+2i$ である。また、

$$w = \frac{(4+2i)z+4-4i}{z+2-2i}$$

$$\Leftrightarrow w(z+2-2i) = (4+2i)z+4-4i$$

$$\Leftrightarrow (-w+4+2i)z = (w-2)(2-2i)$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{(w-2)(2-2i)}{-w+4+2i} \quad (\because w \neq 4+2i)$$

である。ここで点 $P(z)$ が C 上を動くとき、 $|z|=2$ であるから

$$|z|=2$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{(w-2)(2-2i)}{-w+4+2i} \right| = 2$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} \left| \frac{w-2}{-w+4+2i} \right| = 2$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{w-2}{-w+4+2i} \right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{w-2}{-w+4+2i} \cdot \frac{\bar{w}-2}{-\bar{w}+4-2i} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(w-2)(\bar{w}-2) = w\bar{w} - (4-2i)w - (4+2i)\bar{w} + 20$$

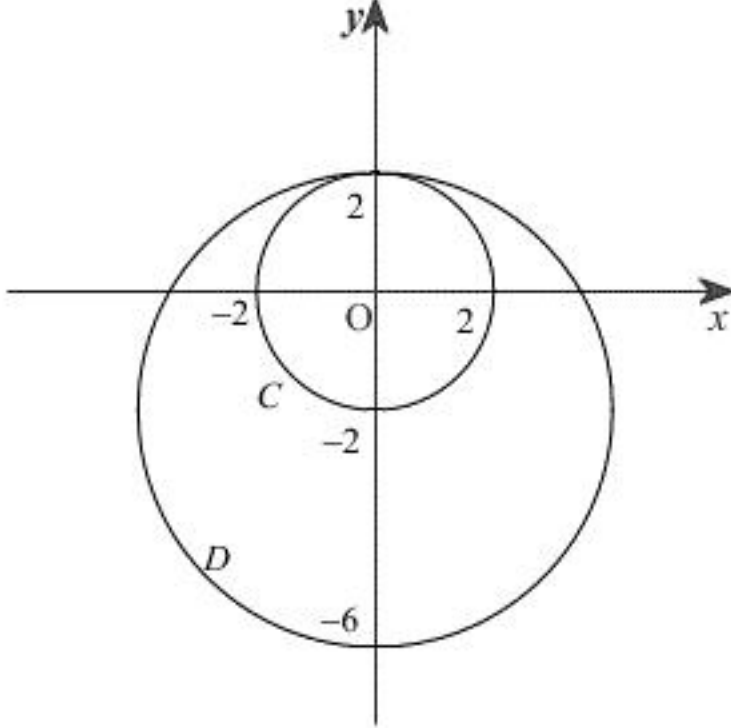
$$\Leftrightarrow w\bar{w} - 2iw + 2i\bar{w} + 4 = 16$$

$$\Leftrightarrow (w+2i)(\bar{w}-2i) = 16$$

$$\Leftrightarrow |w+2i|^2 = 4^2$$

$$\therefore |w+2i| = 4$$

となる。したがって、点 $Q(w)$ は複素数 $\alpha = -2i$ で表される点 $A(\alpha)$ を中心とする、半径 $r=4$ の円上を動く。この円を D とおき、2つの円 C, D を複素数平面に図示すると下のようになる。



したがって、 $\beta = 2i$ である。ここで、

$$\frac{z-w}{z-\beta} = \frac{z - \frac{(4+2i)z+4-4i}{z+2-2i}}{z-2i}$$

$$= \frac{z(z+2-2i) - ((4+2i)z + (4-4i))}{(z-2i)(z+2-2i)}$$

$$= \frac{z^2 - (2+4i)z - (4-4i)}{(z-2i)(z+2-2i)}$$

$$= \frac{(z-2i)(z-2-2i)}{(z-2i)(z+2-2i)}$$

$$= \frac{z-2-2i}{z+2-2i} \quad (\because z \neq 2i)$$

と変形できる。 $PQ = |z-w|$, $BP = |z-\beta|$ であるから、

$$\sqrt{5}PQ \leq BP$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{z-w}{z-\beta} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (\because z \neq \beta)$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{z-2-2i}{z+2-2i} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(z-2-2i)(\bar{z}-2+2i)}{(z+2-2i)(\bar{z}+2+2i)} \leq \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5(z-2-2i)(\bar{z}-2+2i) \leq (z+2-2i)(\bar{z}+2+2i)$$

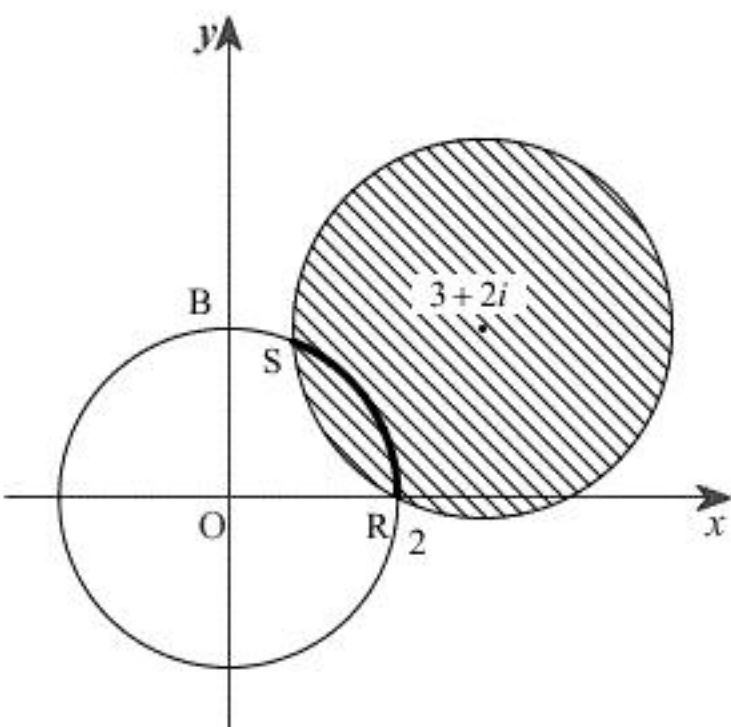
$$\Leftrightarrow 5z\bar{z} - (10-10i)z - (10+10i)\bar{z} + 40 \leq z\bar{z} + (2+2i)z + (2-2i)\bar{z} + 8$$

$$\Leftrightarrow 4\{z\bar{z} - (3+2i)\bar{z} - (3-2i)z + 8\} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (z-3-2i)(\bar{z}-3+2i) \leq 5$$

$$\Leftrightarrow |z-(3+2i)| \leq \sqrt{5}$$

である。したがって、点 P の軌跡を図示すると下図の太線部分となる。ただし、端点を含む。



2円の交点を図のように R, S とおく。直線 RS と、原点と点 $3+2i$ を結ぶ直線の交点を T とおく。これら2直線は垂直であるから、 xy 平面上で考えると直線 OT の方程式は $y = \frac{2}{3}x$ 、直線

RS の方程式は $y = -\frac{3}{2}x + 3$ であり、

$$-\frac{3}{2}x + 3 = \frac{2}{3}x \Leftrightarrow x = \frac{18}{13}$$

より $T\left(\frac{18}{13}, \frac{12}{13}\right)$ である。また、 $R(2)$ であり、 T は線分 RS の中点であるため、 $S\left(\frac{10}{13}, \frac{24}{13}\right)$ である。よって、

$$BS = \sqrt{\left(\frac{10}{13}\right)^2 + \left(2 - \frac{24}{13}\right)^2} = \frac{2\sqrt{26}}{13}$$

である。以上より、 BP の最大値、最小値はそれぞれ $BR = 2\sqrt{2}$, $BS = \frac{2\sqrt{26}}{13}$ である。

【Ⅱ】

問 1

A から球を取り出す事象を A 、B から球を取り出す事象を B 、赤球を取り出す事象を R とおくと、 $p = P_R(A)$ である。赤球を取り出すのは A から取り出す場合と B から取り出す場合に分かれるから、

$$\begin{aligned} P(R) &= P(A \cap R) + P(B \cap R) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{x}{n} + \frac{5}{6} \cdot \frac{y}{n} \\ &= \frac{x+5y}{6n} \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} p &= \frac{P(A \cap R)}{P(R)} \\ &= \frac{\frac{x}{6n}}{\frac{x+5y}{6n}} \\ &= \frac{x}{x+5y} \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{x}{x+5y}$$

問 2

$x > 0, y > 0$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} &\leq p \leq \frac{2}{7} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{6} &\leq \frac{x}{x+5y} \leq \frac{2}{7} \\ \Leftrightarrow \frac{x+5y}{6} &\leq x \leq \frac{2(x+5y)}{7} \\ \Leftrightarrow x+5y &\leq 6x \text{ かつ } 7x \leq 2x+10y \\ \Leftrightarrow y &\leq x \leq 2y \\ \Leftrightarrow \frac{x}{2} &\leq y \leq x \end{aligned}$$

である。したがって、 $N(n)$ は

$$\begin{cases} \frac{x}{2} \leq y \leq x \\ 1 \leq x \leq n \\ 1 \leq y \leq n \end{cases} \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たす自然数の組 (x, y) の個数に等しい。ここで、 $\textcircled{1}$ を満たす y の個数を以下のように場合分けして求める。

[1] x が偶数のとき

$x = 2k$ (k は自然数) とおくと $\textcircled{1}$ を満たす y の個数は $2k - k + 1 = k + 1$ (個) である。

[2] x が奇数のとき

$x = 2k - 1$ (k は自然数) とおくと $\textcircled{1}$ を満たす y の個数は $2k - 1 - k + 1 = k$ (個) である。

以上の結果を用いて、 $N(n)$ の値を n の偶奇で場合分けして求める。

[1] n が偶数のとき

$n = 2m$ (m は自然数) をおくと

$$\begin{aligned} N(n) &= \sum_{k=1}^m k + \sum_{k=1}^m (k+1) \\ &= \frac{m(m+1)}{2} + \frac{m(m+3)}{2} \\ &= \frac{m(2m+4)}{2} \\ &= \frac{n^2+4n}{4} \end{aligned}$$

である。

[2] n が奇数のとき

$n = 2m - 1$ (m は自然数) をおくと

$$\begin{aligned} N(n) &= \sum_{k=1}^m k + \sum_{k=1}^{m-1} (k+1) \\ &= \frac{m(m+1)}{2} + \frac{(m+2)(m-1)}{2} \\ &= \frac{2m^2+2m-2}{2} \\ &= m^2+m-1 \\ &= \frac{n^2+2n+1}{4} + \frac{n+1}{2} - 1 \\ &= \frac{n^2+4n-1}{4} \end{aligned}$$

である。

以上, [1], [2] より,

$$N(n) = \begin{cases} \frac{n^2+4n}{4} & (n \text{ が偶数}) \\ \frac{n^2+4n-1}{4} & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

である。

$$\text{(答)} \quad N(n) = \begin{cases} \frac{n^2+4n}{4} & (n \text{ が偶数}) \\ \frac{n^2+4n-1}{4} & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

問 3

[1] n が偶数のとき

$$\begin{aligned} N(n) &< 2022 \\ \Leftrightarrow \frac{n^2+4n}{4} &< 2022 \\ \Leftrightarrow n(n+4) &< 8088 \end{aligned}$$

である。 $n(n+4)$ は単調増加であり、 $86 \cdot 90 = 7740$, $88 \cdot 92 = 8096$ であるから、上式を満たす最大の偶数 n は 86 である。

[2] n が奇数のとき

$$\begin{aligned} N(n) &< 2022 \\ \Leftrightarrow \frac{n^2+4n-1}{4} &< 2022 \\ \Leftrightarrow n(n+4) &< 8089 \end{aligned}$$

である。 $n(n+4)$ は単調増加であり、 $87 \cdot 91 = 7917$, $89 \cdot 93 = 8277$ であるから、上式を満たす最大の奇数 n は 87 である。

以上, [1], [2] より、 $N(n) < 2022$ を満たす最大の整数 n は 87 である。

$$\text{(答)} \quad n = 87$$

Ⅲ

問 1

$y = -mx + k$ を $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ に代入すると

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{m^2 x^2 - 2mkx + k^2}{b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow (a^2 m^2 + b^2) x^2 - 2ma^2 kx + a^2 (k^2 - b^2) = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。 x についての 2 次方程式①の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (-ma^2 k)^2 - (a^2 m^2 + b^2) a^2 (k^2 - b^2) \\ &= -a^2 b^2 (k^2 - a^2 m^2 - b^2) \end{aligned}$$

である。ここで、楕円 C と直線 l が接するとき、 x についての 2 次方程式①が重解を持つため、

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow -a^2 b^2 (k^2 - a^2 m^2 - b^2) &= 0 \\ \therefore k^2 &= a^2 m^2 + b^2 \quad (\because a > b > 0) \end{aligned}$$

となる。楕円 C と直線 l は第 1 象限で接するから、 $k > 0$ であり $k = \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$ である。このとき①の重解は

$$\begin{aligned} x &= -\frac{-2ma^2 \sqrt{a^2 m^2 + b^2}}{2(a^2 m^2 + b^2)} \\ &= \frac{a^2 m}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}} \end{aligned}$$

であるから点 A の x 座標は $\frac{a^2 m}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}$ である。よって点 A の y 座標は

$$\begin{aligned} y &= -m \frac{a^2 m}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}} + \sqrt{a^2 m^2 + b^2} \\ &= \frac{b^2}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}} \end{aligned}$$

である。以上より、点 A の座標は $A\left(\frac{a^2 m}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}\right)$ である。

$$(\text{答}) \quad A\left(\frac{a^2 m}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}\right)$$

問 2

h は O と直線 l の距離に等しい。 $y = -mx + k \Leftrightarrow mx + y - k = 0$ であるから、

$$\begin{aligned} h &= \frac{|m \cdot 0 + 0 - k|}{\sqrt{m^2 + 1^2}} \\ &= \frac{k}{\sqrt{m^2 + 1}} \\ &= \frac{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}{\sqrt{m^2 + 1}} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

問 3

問 1 の結果より、

$$OA = \sqrt{\left(\frac{a^2 m}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b^2}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^4 m^2 + b^4}}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}$$

である。 $\triangle AOH$ は $\angle AHO = 90^\circ$ の直角三角形であるから、

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{OH}{OA} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}{\sqrt{m^2 + 1}}}{\frac{\sqrt{a^4 m^2 + b^4}}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}} \\ &= \frac{a^2 m^2 + b^2}{\sqrt{m^2 + 1} \sqrt{a^4 m^2 + b^4}} \end{aligned}$$

である。 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $\sin \theta > 0$ であるから、

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 - \frac{(a^2 m^2 + b^2)^2}{(m^2 + 1)(a^4 m^2 + b^4)}} \\ &= \sqrt{\frac{a^4 m^4 + a^4 m^2 + b^4 m^2 + b^4 - (a^4 m^4 + 2a^2 m^2 b^2 + b^4)}{(m^2 + 1)(a^4 m^2 + b^4)}} \\ &= \frac{\sqrt{m^2(a^2 - b^2)^2}}{\sqrt{(m^2 + 1)(a^4 m^2 + b^4)}} \\ &= \frac{m(a^2 - b^2)}{\sqrt{(m^2 + 1)(a^4 m^2 + b^4)}} \quad (\because m > 0, a > b > 0) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{m(a^2 - b^2)}{\sqrt{(m^2 + 1)(a^4 m^2 + b^4)}}$$

問 4

問 3 の結果より

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{m(a^2 - b^2)}{\sqrt{(m^2 + 1)(a^4 m^2 + b^4)}} \\ &= \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{\left(m + \frac{1}{m}\right)\left(a^4 m + \frac{b^4}{m}\right)}} \quad (\because m > 0) \\ &= \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^4 m^2 + \frac{b^4}{m^2} + a^4 + b^4}} \end{aligned}$$

である。 $a^4 m^2 > 0, \frac{b^4}{m^2} > 0$ より、相加相乗平均の関係を用いると

$$a^4 m^2 + \frac{b^4}{m^2} \geq 2\sqrt{a^4 m^2 \cdot \frac{b^4}{m^2}} = 2a^2 b^2$$

であるから、

$$\frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^4 m^2 + \frac{b^4}{m^2} + a^4 + b^4}} \leq \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^4 + 2a^2 b^2 + b^4}} = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)^2}} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

である。等号は、

$$\begin{cases} a^4 m^2 = \frac{b^4}{m^2} \\ m > 0, a > b > 0 \end{cases}$$

すなわち $m = \frac{b}{a}$ のときに成立する。したがって、 $\sin \theta$ の最大値 $M(a, b)$ は $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ である。

$$(\text{答}) \quad M(a, b) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

問 5

$a = r \cos \theta, b = r \sin \theta$ ($r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) とおくと、

$$\begin{aligned} M(a, b) &= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} \\ &= \cos 2\theta \end{aligned}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} (a-b)^2 + (b-1)^2 &\leq \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow r^2 (\cos \theta - \sin \theta)^2 + (r \sin \theta - 1)^2 &\leq \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow r^2 (1 - \sin 2\theta + \sin^2 \theta) - 2r \sin \theta + 1 &\leq \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow r^2 (1 - \sin 2\theta + \sin^2 \theta) - 2r \sin \theta + \frac{1}{4} &\leq 0 \end{aligned}$$

である。左辺を $f(r)$ とおき、 $f(r) \leq 0$ を満たす r ($r > 0$) が存在するような θ の範囲を考える。

まず、 $a > b > 0$ であるから、 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ であり、

$$\begin{cases} 1 - \sin 2\theta > 0 \quad \left(\because 0 < 2\theta < \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin \theta > 0 \quad \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right) \end{cases} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。次に $f(r)$ について考える。①より、 r^2 の係数 $1 - \sin 2\theta + \sin^2 \theta$ は正である。また、

$f(0) = \frac{1}{4} > 0$ である。さらに、放物線 $y = f(r)$ の軸は

$$r = \frac{\sin \theta}{1 - \sin 2\theta + \sin^2 \theta} > 0$$

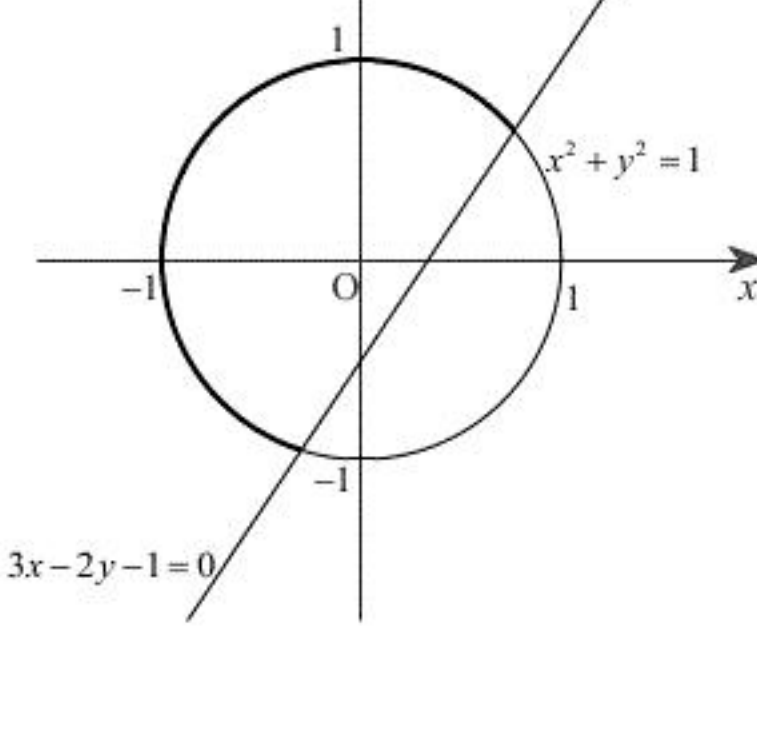
である。したがって、 $f(r) \leq 0$ を満たす r ($r > 0$) が存在するための条件は、 $f(r) = 0$ の判別式が 0 以上であることである。判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (-\sin \theta)^2 - \frac{1}{4} (1 - \sin 2\theta + \sin^2 \theta) \\ &= \frac{3}{4} \sin^2 \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\theta - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{8} (1 + 2 \sin 2\theta - 3 \cos 2\theta) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore 3 \cos 2\theta - 2 \sin 2\theta - 1 \leq 0$$

となる。 $(X, Y) = (\cos 2\theta, \sin 2\theta)$ とおくと、 $X^2 + Y^2 = 1$ かつ $3X - 2Y - 1 \leq 0$ であるから、点

(X, Y) の存在範囲は下図の太線部分である。ただし、端点を含む。



$X^2 + Y^2 = 1, 3X - 2Y - 1 = 0$ から Y を消去すると

$$\begin{aligned} X^2 + \left(\frac{3X-1}{2}\right)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{13}{4} X^2 - \frac{3}{2} X - \frac{3}{4} &= 0 \\ \therefore X &= \frac{3 \pm 4\sqrt{3}}{13} \end{aligned}$$

であるから、 $-1 \leq X = \cos 2\theta \leq \frac{3+4\sqrt{3}}{13}$ である。これと $0 < \cos 2\theta < 1$ ($\because 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) より

$0 < \cos 2\theta \leq \frac{3+4\sqrt{3}}{13}$ である。以上より、 $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ の最大値は $\frac{3+4\sqrt{3}}{13}$ である。

$$(\text{答}) \quad \frac{3+4\sqrt{3}}{13}$$

【Ⅳ】

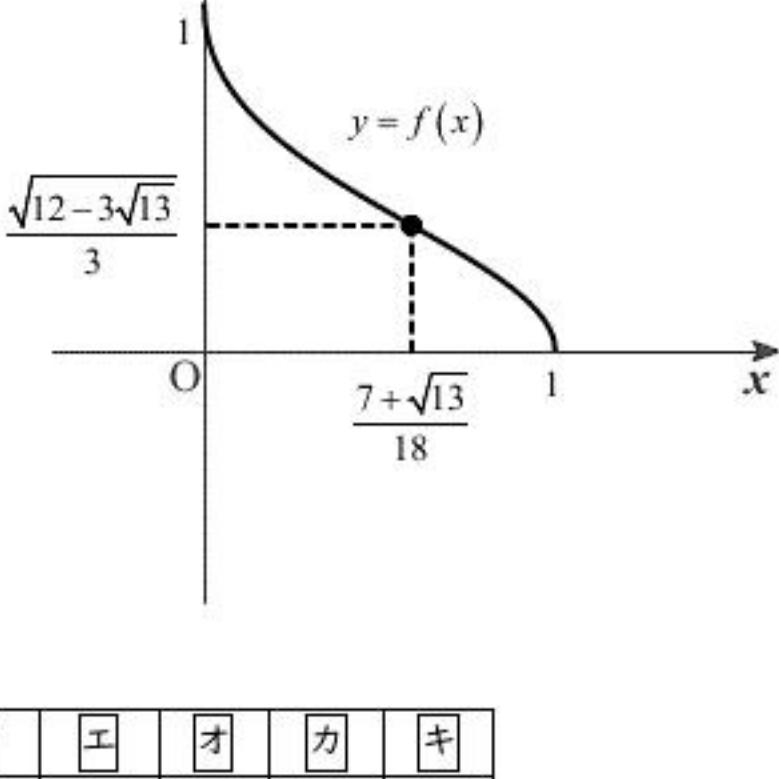
【解答】

問 1

増減表

x	0	…	$\frac{7+\sqrt{13}}{18}$	…	1
$f'(x)$		–	–	–	
$f''(x)$		+	0	–	
$f(x)$	1	$\curvearrowright$	$\frac{\sqrt{12-3\sqrt{13}}}{3}$	$\curvearrowleft$	0

グラフ



ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
7	13	18	12	3	13	3

問 2

$y = \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$ を x について解くと

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} \\ \Leftrightarrow y^2 &= \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \quad (\because y > 0) \\ \Leftrightarrow y^2(1+\sqrt{x}) &= 1-\sqrt{x} \\ \Leftrightarrow (y^2+1)\sqrt{x} &= 1-y^2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x} &= \frac{1-y^2}{1+y^2} \\ \therefore x &= \left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)^2 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 x^2 dy \\ &= \pi \int_0^1 \left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)^4 dy \end{aligned}$$

となる。ここで、 $y = \tan \theta$ とおくと $\frac{dy}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ である。また、 y と θ の対応は下のようになる。

θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$
y	0	$\rightarrow$	1

したがって、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1-\tan^2 \theta}{1+\tan^2 \theta}\right)^4 \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}\right)^4 \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2 \theta - 1)^4 \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(16\cos^6 \theta - 32\cos^4 \theta + 24\cos^2 \theta - 8 + \frac{1}{\cos^2 \theta}\right) d\theta \end{aligned}$$

である。ここで、 n を自然数として、 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n} \theta d\theta$ とおく。まず

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

である。次に、 $n \geq 1$ のとき、

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n+2} \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n+1} \theta \cos \theta d\theta \\ &= \left[\cos^{2n+1} \theta \sin \theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + (2n+1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n} \theta \sin^2 \theta d\theta \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n+2} + (2n+1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n} \theta (1-\cos^2 \theta) d\theta \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + (2n+1)(I_n - I_{n+1}) \\ \therefore I_{n+1} &= \frac{1}{2n+2} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + (2n+1)I_n \right\} \end{aligned}$$

である。よって、

$$I_2 = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{4} + 3 \left(\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} \right) \right\} = \frac{1}{4} + \frac{3}{32} \pi$$

$$I_3 = \frac{1}{6} \left\{ \frac{1}{8} + 5 \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{32} \pi \right) \right\} = \frac{11}{48} + \frac{5}{64} \pi$$

となるから、

$$\begin{aligned} V &= \pi \left(16I_3 - 32I_2 + 24I_1 - 8 \cdot \frac{\pi}{4} + \left[\tan \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \right) \\ &= \pi \left\{ 16 \left(\frac{11}{48} + \frac{5}{64} \pi \right) - 32 \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{32} \pi \right) + 24 \left(\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} \right) - 2\pi + 1 \right\} \\ &= \pi \left(\frac{8}{3} - \frac{3}{4} \pi \right) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad V = \pi \left(\frac{8}{3} - \frac{3}{4} \pi \right)$$

【解説】

問 1

$f(x) = \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$ であるから、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x}) - (1-\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{1-\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{x-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}(x-1)} \cdot \frac{\sqrt{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}}{(\sqrt{1+\sqrt{x}})^2} \\ &= \frac{f(x)}{2\sqrt{x}(x-1)} \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{f'(x)2\sqrt{x}(x-1) - f(x) \cdot 2\left(\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left\{2\sqrt{x}(x-1)\right\}^2} \\ &= \frac{\frac{f(x)}{2\sqrt{x}(x-1)} \cdot 2\sqrt{x}(x-1) - f(x) \cdot 2\left(\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left\{2\sqrt{x}(x-1)\right\}^2} \\ &= \frac{f(x)}{\left\{2\sqrt{x}(x-1)\right\}^2} \left(1 - 3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\ &= \frac{f(x)}{\sqrt{x}\left\{2\sqrt{x}(x-1)\right\}^2} (\sqrt{x} + 1 - 3x) \\ &= -\frac{3f(x)}{4x\sqrt{x}(x-1)^2} \left(\sqrt{x} - \frac{1-\sqrt{13}}{6}\right) \left(\sqrt{x} - \frac{1+\sqrt{13}}{6}\right) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $3 < \sqrt{13} < 4$ より $\frac{1-\sqrt{13}}{6} < 0, 0 < \frac{1+\sqrt{13}}{6} < 1$ である。また、

$$\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)^2 = \frac{7+\sqrt{13}}{18} \text{ であり,}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{7+\sqrt{13}}{18}\right) &= \sqrt{\frac{1-\frac{1+\sqrt{13}}{6}}{1+\frac{1+\sqrt{13}}{6}}} \\ &= \sqrt{\frac{6-(1+\sqrt{13})}{6+(1+\sqrt{13})}} \\ &= \sqrt{\frac{5-\sqrt{13}}{7+\sqrt{13}}} \\ &= \sqrt{\frac{(5-\sqrt{13})(7-\sqrt{13})}{36}} \\ &= \frac{\sqrt{48-12\sqrt{13}}}{6} \\ &= \frac{\sqrt{12-3\sqrt{13}}}{3} \end{aligned}$$

となる。したがって、増減表は下のようになる。

x	0	…	$\frac{7+\sqrt{13}}{18}$	…	1
$f'(x)$		–	–	–	
$f''(x)$		+	0	–	
$f(x)$	1	$\curvearrowright$	$\frac{\sqrt{12-3\sqrt{13}}}{3}$	$\curvearrowleft$	0

特に、変曲点の座標は $\left(\frac{7+\sqrt{13}}{18}, \frac{\sqrt{12-3\sqrt{13}}}{3}\right)$ である。また、 $\lim_{x \rightarrow +0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f'(x) = -\infty$ であ

るから、グラフは下のようになる。

