

# 令和4年度 入学試験問題

## 数学（前期）

|      |      |
|------|------|
| 試験時間 | 90分  |
| 問題冊子 | 1～8頁 |

### 注意事項

1. 指示があるまで問題冊子は開かないこと。
2. 問題冊子および解答用紙に落丁，乱丁，印刷の不鮮明な箇所があったら，手を挙げて監督者に知らせること。
3. 解答が終わっても，または試験を放棄する場合でも，試験終了までは退場できない。
4. スマートフォン等の電子機器類は電源を必ず切り，鞆の中にしまうこと。
5. 机上には，受験票と筆記用具（鉛筆，シャープペンシル，消しゴム）および時計（計時機能のみ）以外は置かないこと。（耳栓，コンパス，定規等は使用できない。）
6. 問題冊子および解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
7. 解答はすべて解答用紙の所定の解答欄に記入すること。欄外には何も書かないこと。
8. この問題冊子の余白は自由に用いてよい。
9. 質問，トイレ，体調不良等で用件のある場合は，無言のまま手を挙げて監督者の指示に従うこと。
10. 中途退室時は，問題冊子および解答用紙を裏返しにすること。
11. 受験中不正行為があった場合は，試験の一切を無効とし，試験終了時間まで別室で待機を命じる。
12. 試験終了後，解答用紙は裏返し，問題冊子は持ち帰ること。

|      |  |
|------|--|
| 受験番号 |  |
|------|--|

|    |  |
|----|--|
| 氏名 |  |
|----|--|





[ I ] 以下の文中の [ア] ～ [サ] に適する 1 以上の整数を解答欄に記入せよ。なお、分数形で解答する場合は、既約分数で答えること。また、根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる 1 以上の整数が最小となる形で答えよ。

$i$  を虚数単位とする。O を原点とする複素数平面上において、中心が O、半径が 2 の円を  $C$  とする。 $C$  上の点  $P(z)$  に対して、複素数平面上の点  $Q(w)$  を次のように定める。

$$w = \frac{(4+2i)z + 4 - 4i}{z + 2 - 2i}$$

点  $P(z)$  が  $C$  上を動くとき、点  $Q(w)$  は複素数  $\alpha = -[\text{ア}]i$  で表される点  $A(\alpha)$  を中心とし、半径  $r = [\text{イ}]$  の円上を動く。このとき、 $z = w$  を満たす  $C$  上の点  $z$  がただ 1 つ存在し、その点を  $B(\beta)$  とおく。 $z \neq \beta$  を満たす点  $P(z)$  に対して、等式

$$\frac{z-w}{z-\beta} = \frac{z-[\text{ウ}]-[\text{エ}]i}{z+[\text{オ}]-[\text{カ}]i}$$

が成り立つことを用いると、点  $P(z)$  が  $z \neq \beta$  かつ  $\sqrt{5}PQ \leq BP$  を満たしながら  $C$  上を動くとき、BP は最大値  $[\text{キ}]\sqrt{[\text{ク}]}$  と最小値  $\frac{[\text{ケ}]\sqrt{[\text{コ}]}}{[\text{サ}]}$  をとることがわかる。ただし、複素数平面上の 2 点 X, Y に対して、XY は 2 点 X, Y 間の距離を表す。

( 計 算 用 紙 )

[ II ]  $n$  を 1 以上の整数とし,  $x, y$  を 1 以上  $n$  以下の整数とする。中が見えない 2 つの箱 A, B があり, A には赤球  $x$  個と白球  $n - x$  個が, B には赤球  $y$  個と白球  $n - y$  個が, それぞれ入っている。どの目も出る確率が  $\frac{1}{6}$  である 1 つのさいころを 1 回投げて, 1 の目が出たら A から 1 球を取り出し, 1 以外の目が出たら B から 1 球を取り出すことを考える。その結果, 赤球が取り出されたとき, この赤球が A から取り出された確率を  $p$  として以下の各問いに答えよ。

問 1  $p$  を求めよ。答えのみでよい。

問 2  $\frac{1}{6} \leq p \leq \frac{2}{7}$  を満たす座標平面上の点  $(x, y)$  の個数  $N(n)$  を求めよ。

問 3 問 2 の  $N(n)$  に対して,  $N(n) < 2022$  を満たす最大の整数  $n$  を求めよ。

( 計 算 用 紙 )

[III]  $a, b$  を  $a > b > 0$  を満たす定数とし,  $m, k$  を正の定数とする。O を原点とする座標平面において, 楕円  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  に直線  $l: y = -mx + k$  が第 1 象限の点 A で接しているとする。また, O から  $l$  に垂線 OH を下ろし, 2 直線 OA, OH のなす角を  $\theta$  とする。ただし,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  とする。このとき, 以下の各問いに答えよ。

問 1 点 A の座標を  $m, a, b$  を用いて表せ。答えのみでよい。

問 2 線分 OH の長さ  $h$  を  $m, a, b$  を用いて表せ。答えのみでよい。

問 3  $\sin \theta$  を  $m, a, b$  を用いて表せ。答えのみでよい。

問 4  $a, b$  を固定し, 正の実数  $m$  を動かすとき,  $\sin \theta$  の最大値  $M(a, b)$  を求めよ。

問 5  $a, b$  を,  $a > b > 0$  かつ  $(a - b)^2 + (b - 1)^2 \leq \frac{3}{4}$  を満たすように動かすとき, 問 4 の  $M(a, b)$  の最大値を求めよ。

( 計 算 用 紙 )

[IV] 関数  $f(x) = \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$  (ただし,  $0 \leq x \leq 1$ ) に対して, 曲線  $y = f(x)$  と  $x$  軸,  $y$  軸で囲まれた図形を  $y$  軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を  $V$  とするとき, 以下の各問いに答えよ。

問1 曲線  $y = f(x)$  の凹凸を調べて増減表をかき, グラフの概形をかけ。以上に関しては結果のみを解答欄に記せ。特に, 曲線  $y = f(x)$  の変曲点の座標は,

$$\left( \frac{\boxed{\text{ア}} + \sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}, \frac{\sqrt{\boxed{\text{エ}} - \boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}}{\boxed{\text{キ}}} \right)$$

となる。 $\boxed{\text{ア}} \sim \boxed{\text{キ}}$  に適する 1 以上の整数を解答欄に記入せよ。なお, 分数形で解答する場合は, 既約分数で答えること。また, 根号を含む形で解答する場合は, 根号の中に現れる 1 以上の整数が最小となる形で答えよ。

問2  $V$  を求めよ。

( 計 算 用 紙 )









