

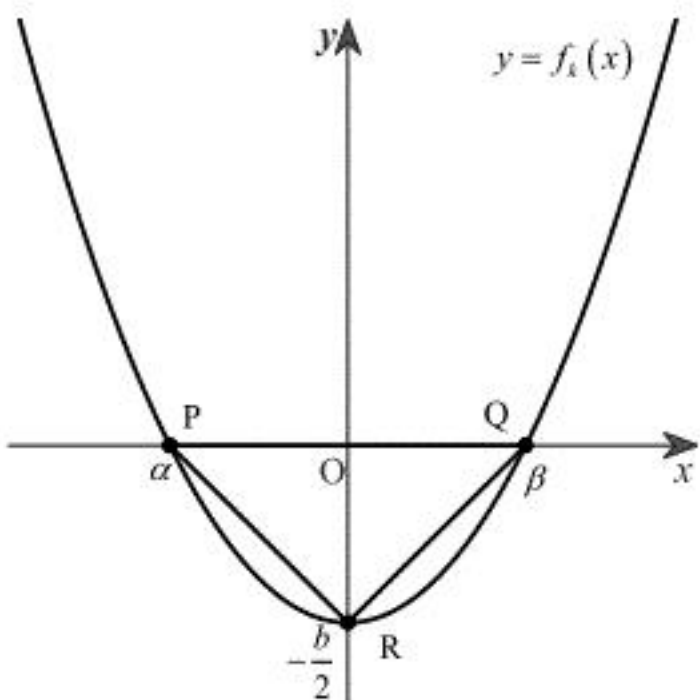
【Ⅰ】

【解答】

問 1	ア	$\frac{1}{12}$			
問 2	イ	4	ウ	5	エ $\frac{1}{36}$
問 3	カ	7	キ	8	ク $\frac{1}{18}$
					ケ $\frac{1}{18}$

【解説】

問 1



$f_k(0) < 0$ より、P、Q の座標は $\alpha < 0 < \beta$ を満たす実数 α, β を用いてそれぞれ $(\alpha, 0), (\beta, 0)$ とおける。 α, β は x についての 2 次方程式 $f_k(x) = 0$ の 2 つの実数解より、解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = -\frac{2}{a}(a + b - k) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha\beta = -\frac{b}{a} \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。また、R の座標は $\left(0, -\frac{b}{2}\right)$ である。ここで、 $\triangle PQR$ が直角三角形となるとき

$\angle RPQ = 90^\circ$ とすると、 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 0$ より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\beta - \alpha, 0) \cdot \left(-\alpha, -\frac{b}{2}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha(\alpha - \beta) &= 0 \\ \therefore \alpha &= 0 \quad (\because \alpha - \beta < 0) \end{aligned}$$

となるが、 $\textcircled{2}$ より $b = 0$ となりこれは $b \neq 0$ に不適である。以上より、 $\angle RPQ \neq 90^\circ$ である。同様に $\angle RQP \neq 90^\circ$ でもあるから、 $\triangle PQR$ が直角三角形となるとき $\angle PRQ = 90^\circ$ である。よって、 $\textcircled{2}$ より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\alpha, \frac{b}{2}\right) \cdot \left(\beta, \frac{b}{2}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha\beta + \frac{b^2}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{b^2}{4} &= -\frac{b}{a} \\ \Leftrightarrow ab &= 4 \quad (\because a \neq 0, b \neq 0) \end{aligned}$$

である。したがって、 $\triangle PQR$ が直角三角形となるような (a, b) の組は $(a, b) = (1, 4), (2, 2), (4, 1)$ の 3 通りある。 (a, b) は全部で 6^2 通りあり、これらは同様に確からしいから

$$P_0(k) = \frac{3}{6^2} = \frac{1}{12}$$

である。

問 2

問 1 より $\triangle PQR$ が直角二等辺三角形であるための条件は

$$\angle PRQ = 90^\circ \text{ かつ } |\overrightarrow{RP}| = |\overrightarrow{RQ}|$$

である。ここで、 $\textcircled{1}$ より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{RP}| &= |\overrightarrow{RQ}| \\ \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2 + \frac{b^2}{4}} &= \sqrt{\beta^2 + \frac{b^2}{4}} \\ \Leftrightarrow \alpha^2 + \frac{b^2}{4} &= \beta^2 + \frac{b^2}{4} \\ \Leftrightarrow (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha + \beta &= 0 \quad (\because \alpha - \beta < 0) \\ \Leftrightarrow -\frac{2}{a}(a + b - k) &= 0 \\ \Leftrightarrow a + b &= k \end{aligned}$$

であり、問 1 より $\angle PRQ = 90^\circ \Leftrightarrow ab = 4$ である。したがって、 $(a, b) = (2, 2)$ のとき $k = 4$ 、 $(a, b) = (1, 4), (4, 1)$ のとき $k = 5$ であり、このとき

$$\begin{aligned} P_1(4) &= \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36} \\ P_1(5) &= \frac{2}{6^2} = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

である。

問 3

$\triangle PQR$ が正三角形であるための条件は

$$|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{QR}| = |\overrightarrow{RP}| \text{ かつ } \angle PRQ = 60^\circ$$

である。問 2 より $|\overrightarrow{RP}| = |\overrightarrow{RQ}| \Leftrightarrow a + b = k$ であるから $f_k(x) = \frac{a}{2}x^2 - \frac{b}{2}$ であり、

$$\begin{aligned} \alpha &= -\sqrt{\frac{b}{a}}, \beta = \sqrt{\frac{b}{a}} \text{ となる。よって、} |\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{QR}| = |\overrightarrow{RP}| = 2\sqrt{\frac{b}{a}} \text{ より} \\ \angle PRQ &= 60^\circ \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} &= |\overrightarrow{RP}| |\overrightarrow{RQ}| \cos 60^\circ \\ \Leftrightarrow -\frac{b}{a} + \frac{b^2}{4} &= 2\sqrt{\frac{b}{a}} \cdot 2\sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow ab &= 12 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\triangle PQR$ が正三角形であるための条件は $a + b = k$ かつ $ab = 12$ であるから、 $(a, b) = (3, 4), (4, 3)$ のとき $k = 7$ 、 $(a, b) = (2, 6), (6, 2)$ のとき $k = 8$ であり、このとき

$$\begin{aligned} P_2(7) &= \frac{2}{6^2} = \frac{1}{18} \\ P_2(8) &= \frac{2}{6^2} = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

問 1	$\pi: x+2y+z-3=0$
問 2	$l: x+2y-3=0$
問 3	$m: -x+2y-3=0$

問 4

問 1, 2, 3 より点 A, B, C の座標を求めると, $A\left(0, \frac{3}{2}, 0\right)$, $B(-3, 0, 0)$, $C(3, 0, 0)$ であり, これらの点は xy 平面上に存在する。よって $P(a, b, c)$ とおくと

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \triangle ABC \cdot |c| \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{3}{2} \cdot |c| \\ &= \frac{3}{2} |c| \end{aligned}$$

である。ここで P は E 上を動くから

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + (c-2)^2 = 1 & \cdots \textcircled{1} \\ a + 2b + c - 3 = 0 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

を満たす。②より $a = -2b - c + 3$ であるから, これを①に代入して

$$\begin{aligned} (-2b - c + 3)^2 + b^2 + (c-2)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 5b^2 + 4(c-3)b + 2c^2 - 10c + 12 &= 0 & \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

である。 b についての 2 次方程式③の判別式を D とおくと,

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 4(c-3)^2 - 5(2c^2 - 10c + 12) \\ &= -6c^2 + 26c - 24 \\ &= -2(3c-4)(c-3) \end{aligned}$$

より, ③を満たす実数 b が存在する条件は

$$D \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq c \leq 3$$

である。よって $|c|$ の最小値は $\frac{4}{3}$ であるから, $V = \frac{3}{2}|c|$ より V の最小値は 2 である。 $c = \frac{4}{3}$ のとき③は

$$\begin{aligned} 5b^2 - \frac{20}{3}b + \frac{20}{9} &= 0 \\ \Leftrightarrow 5\left(b - \frac{2}{3}\right)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow b &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となり, これと②より $a = -\frac{4}{3} - \frac{4}{3} + 3 = \frac{1}{3}$ である。よって $c = \frac{4}{3}$ のとき $P\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ である。

(答) (V の最小値) 2 (P の座標) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$

〔解説〕

問 1

$$\begin{aligned} S_1: x^2 + y^2 + (z-2)^2 &= 1 \\ S_2: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 &= 5 \end{aligned}$$

の辺々を引いた方程式である $2x + 4y + 2z - 6 = 0$, すなわち

$$x + 2y + z - 3 = 0$$

は平面を表し, E を含んでいる。 E を含む平面はただ 1 つであるため, 求める π の方程式は $\pi: x + 2y + z - 3 = 0$ である。

問 2

π の方程式で $z = 0$ とした, $x + 2y - 3 = 0$ が xy 平面内における l の方程式である。

問 3

l の方程式で x を $-x$ に置き換えた, $-x + 2y - 3 = 0$ が xy 平面内における m の方程式である。

【Ⅲ】

【解答】

問 1	ア	9	イ	16	ウ	1	エ	2	オ	4
問 2	カ	9	キ	64						
問 3	ク	10	ケ	81						

問 4

$a_n = n+1, b_n = n+2, c_n = n+4$ より, 求める極限は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left\{ \frac{(3n+7)!}{n!} \right\}^{\frac{1}{n}}$$

である。ここで

$$\begin{aligned} \log \left[\frac{1}{n^2} \left\{ \frac{(3n+7)!}{n!} \right\}^{\frac{1}{n}} \right] &= \log \left\{ \frac{1}{n^{2n}} (3n+7)(3n+6) \cdots (n+1) \right\}^{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{n} \log \left\{ (3n+7)(3n+6) \cdots (3n+1) \cdot \frac{3n}{n} \cdot \frac{3n-1}{n} \cdots \frac{n+1}{n} \right\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^7 \log(3n+k) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \log \frac{n+k}{n} \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^7 \log(3n+k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^7 \left\{ \frac{3n+k}{n} \cdot \frac{\log(3n+k)}{3n+k} \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \log \frac{n+k}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \log \left(1 + \frac{k}{n} \right) \\ &= \int_0^2 \log(1+x) dx \\ &= \left[(1+x) \log(1+x) \right]_0^2 - \int_0^2 dx \\ &= \left[(1+x) \log(1+x) - x \right]_0^2 \\ &= 3 \log 3 - 2 \\ &= \log \frac{27}{e^2} \end{aligned}$$

より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \left[\frac{1}{n^2} \left\{ \frac{(3n+7)!}{n!} \right\}^{\frac{1}{n}} \right] = \log \frac{27}{e^2}$$

であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left\{ \frac{(3n+7)!}{n!} \right\}^{\frac{1}{n}} = \frac{27}{e^2}$$

となる。

(答) $\frac{27}{e^2}$

【解説】

問 1

p, q, r を $p+q+r=n+2$ を満たす 0 以上の整数とすると, $\left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 1 \right)^{n+2}$ の展開式の一般項は

$$\frac{(n+2)!}{p!q!r!} \left(\frac{3}{2}x^2 \right)^p \left(\frac{3}{2}x \right)^q 1^r = \frac{(n+2)!}{p!q!r!} \left(\frac{3}{2} \right)^{p+q} x^{2p+q}$$

と表せる。 $2p+q=3$ となるのは $(p, q, r) = (0, 3, n-1), (1, 1, n)$ のときであるから

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{(n+2)!}{0!3!(n-1)!} \left(\frac{3}{2} \right)^3 + \frac{(n+2)!}{1!1!n!} \left(\frac{3}{2} \right)^2 \\ &= \frac{9}{16} n(n+1)(n+2) + \frac{9}{4} (n+1)(n+2) \\ &= \frac{9}{16} (n+1)(n+2)(n+4) \end{aligned}$$

となる。

問 2

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n A_k &= \frac{9}{16} \sum_{k=1}^n (k^3 + 7k^2 + 14k + 8) \\ &= \frac{9}{16} \left\{ \frac{1}{4} n^2(n+1)^2 + 7 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + 14 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + 8n \right\} \\ &= \frac{9}{64} n^4 + f(n) \end{aligned}$$

と表せる。ただし $f(n)$ は 3 次以下の整式である。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n A_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{9}{64} + \frac{f(n)}{n^4} \right\} = \frac{9}{64}$$

となる。

問 3

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_k} &= \frac{16}{9} \cdot \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+4)} \\ &= \frac{16}{9} \cdot \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+2)(k+4)} \right\} \\ &= \frac{16}{27} \left\{ \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+4} \right) \right\} \\ &= \frac{16}{27} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) - \frac{8}{27} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+4} \right) \end{aligned}$$

であるから, n が十分大きいとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{A_k} &= \frac{16}{27} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) - \frac{8}{27} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+4} \right) \\ &= \frac{16}{27} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) - \frac{8}{27} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right) \end{aligned}$$

である。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{A_k} = \frac{16}{27} \cdot \frac{1}{2} - \frac{8}{27} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{10}{81}$$

となる。

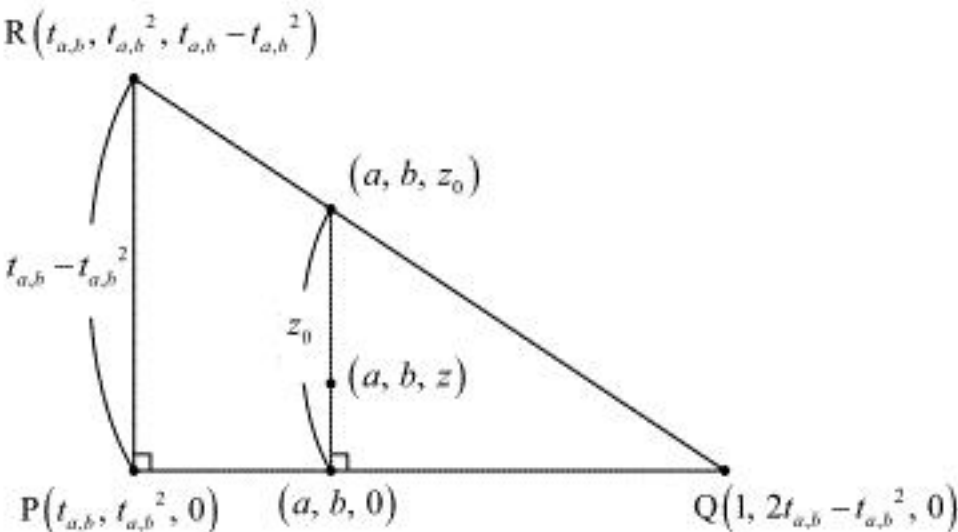
【Ⅳ】

【解答】

問 1	$l: y=2tx-t^2$	ア	$2t-t^2$
問 2	$t_{a,b}=a-\sqrt{a^2-b}$		

問 3

$0 < a < 1$ のときの $K(a)$ 上の点 (a, y, z) について、 $y = b$ ($0 < b \leq a^2$) として固定したときの z の取りうる値の範囲を調べる。三角形 PQR が点 (a, b, z) を通るのは、問 2 より $t = t_{a,b}$ のときに限られる。このとき、P、Q、R と点 (a, b, z) の位置関係は次図のようになる。ただし、線分 QR と平面 $x = a$ の交点の z 座標を z_0 とする。



$$z_0 = \frac{1-a}{1-t_{a,b}}(t_{a,b} - t_{a,b}^2) = (1-a)t_{a,b}$$

より z の取りうる値の範囲は $0 \leq z \leq (1-a)(a - \sqrt{a^2 - b})$ である。したがって、 b を y に置き換えると、三角形 PQR が通過してできる立体の $x = a$ ($0 < a < 1$) での断面は

$$x = a, 0 < y \leq a^2, 0 \leq z \leq (1-a)(a - \sqrt{a^2 - y})$$

で表される。よって $K(a)$ ($0 < a < 1$) は

$$x = a, 0 \leq y \leq a^2, 0 \leq z \leq (1-a)(a - \sqrt{a^2 - y}) \quad \cdots \textcircled{1}$$

で表される。ここで $K(0)$ は $x = 0, y = 0, z = 0$ 、 $K(1)$ は $x = 1, 0 \leq y \leq 1, z = 0$ を表し、これは $\textcircled{1}$ に $a = 0, 1$ をそれぞれ代入したものと一致するから、 $K(a)$ ($0 \leq a \leq 1$) は $\textcircled{1}$ で表される。

$$(\text{答}) \quad (1-a)(a - \sqrt{a^2 - y})$$

問 4

問 3 より

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^{a^2} (1-a)(a - \sqrt{a^2 - y}) dy \\ &= (1-a) \left[ay + \frac{2}{3}(a^2 - y)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{a^2} \\ &= \frac{1}{3}(1-a)a^3 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S(a) = \frac{1}{3}(1-a)a^3$$

問 5

問 4 より

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 S(a) da \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 (a^3 - a^4) da \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{a^4}{4} - \frac{a^5}{5} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{60} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad V = \frac{1}{60}$$

【解説】

問 1

C について $y' = 2x$ より、 xy 平面内における l の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 2t(x-t) + t^2 \\ \Leftrightarrow y &= 2tx - t^2 \end{aligned}$$

である。よって $Q(1, 2t - t^2, 0)$ である。

問 2

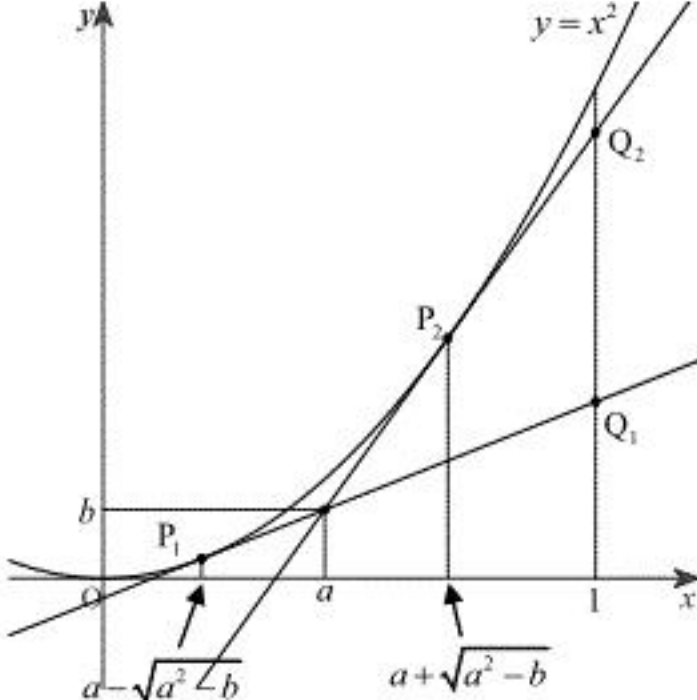
点 $(a, b, 0)$ が線分 PQ 上にあるとき点 $(a, b, 0)$ は l 上にもあるから

$$\begin{aligned} b &= 2ta - t^2 \\ \Leftrightarrow t^2 - 2at + b &= 0 \end{aligned}$$

である。この 2 次方程式の判別式を D とすると、条件から $\frac{D}{4} = a^2 - b \geq 0$ より $t^2 - 2a + b = 0$ には実数解が存在し

$$t = a \pm \sqrt{a^2 - b}$$

である。 $0 < b \leq a^2$ より $-a < -\sqrt{a^2 - b} \leq 0$ であるから $0 < a - \sqrt{a^2 - b} \leq a (< 1)$ である。ここで、 $t = a - \sqrt{a^2 - b}$ のときの P、Q を P_1, Q_1 とし $t = a + \sqrt{a^2 - b} (< 1)$ のときの P、Q を P_2, Q_2 とする。それぞれのときの l とそれに対応する P、Q を下図に図示する。



P、Q、点 $(a, b, 0)$ の x 座標の大小関係に注目すると、点 $(a, b, 0)$ が線分 PQ 上に存在するとき

$$t_{a,b} \leq a \leq 1 \text{ が成り立つから、} t_{a,b} = a - \sqrt{a^2 - b} \text{ である。}$$