

【Ⅰ】

〔解答〕

問 1	ア	イ				
	0	$\frac{2}{3}$				
問 2	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
	3	2	2	2	3	3
問 3	ケ	コ	サ	シ		
	6	13	6	2		
問 4	ス					
	(い)					

〔解説〕

問 1

$x = \cos \angle AOB$, $0 < \alpha < \angle AOB < \frac{\pi}{2}$ であるため, x の動く範囲は

$$\cos \frac{\pi}{2} < \cos \angle AOB < \cos \alpha$$

$$\therefore 0 < x < \frac{2}{3} \left(\because \cos \alpha = \frac{2}{3} \right)$$

である。

問 2

まず, $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の内積を求めると,

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos \angle AOB = 6x \qquad \cdots \textcircled{1}$$

である。 a, b を実数として, $\overrightarrow{OH} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$ とおく。H は三角形 OAB の垂心であるため,

$$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \qquad \cdots \textcircled{2}$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \qquad \cdots \textcircled{3}$$

となる。②より,

$$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}) \cdot (-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow -a|\overrightarrow{OA}|^2 + (a-b)\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + b|\overrightarrow{OB}|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4a + 6x(a-b) + 9b = 0$$

$$\Leftrightarrow a(-4 + 6x) = b(6x - 9)$$

$$\therefore a = \frac{3(3-2x)}{2(2-3x)}b \quad (\because 2-3x \neq 0) \qquad \cdots \textcircled{4}$$

を得る。また, ③より,

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

$$\Leftrightarrow \{(a-1)\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}\} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

$$\therefore 6x(a-1) + 9b = 0 \qquad \cdots \textcircled{5}$$

を得るから, ④を⑤に代入すると,

$$6x \left\{ \frac{3(3-2x)}{2(2-3x)}b - 1 \right\} + 9b = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x(3-2x) + 9(2-3x)}{2-3x}b = 6x$$

$$\Leftrightarrow \frac{18(1-x^2)}{2-3x}b = 6x$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(1-x^2)}{2-3x}b = x$$

$$\therefore b = \frac{x(2-3x)}{3(1-x^2)} \qquad \cdots \textcircled{6}$$

となる。④に⑥を代入して

$$\begin{aligned} a &= \frac{3(3-2x)}{2(2-3x)}b \\ &= \frac{3(3-2x)}{2(2-3x)} \cdot \frac{x(2-3x)}{3(1-x^2)} \\ &= \frac{x(3-2x)}{2(1-x^2)} \end{aligned}$$

を得る。したがって,

$$\overrightarrow{OH} = \frac{x(3-2x)}{2(1-x^2)}\overrightarrow{OA} + \frac{x(2-3x)}{3(1-x^2)}\overrightarrow{OB}$$

となる。

問 3

三角形 OAB の面積を $T(x)$ とすると

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{36 - 36x^2} \\ &= 3\sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

である。直線 OH と線分 AB の交点を C とし, k を 0 でない実数とすると,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= k\overrightarrow{OH} \\ &= \frac{x(3-2x)}{2(1-x^2)}k\overrightarrow{OA} + \frac{x(2-3x)}{3(1-x^2)}k\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

とおける。C は線分 AB 上にあるため,

$$\begin{aligned} \frac{x(3-2x)}{2(1-x^2)}k + \frac{x(2-3x)}{3(1-x^2)}k &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{3x(3-2x) + 2x(2-3x)}{6(1-x^2)}k &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{-12x^2 + 13x}{6(1-x^2)}k &= 1 \\ \therefore k &= \frac{6(1-x^2)}{x(-12x+13)} \quad (\because -12x+13 \neq 0) \end{aligned}$$

を得る。よって,

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{HC}{OC}T(x) \\ &= \frac{k-1}{k}T(x) \\ &= \left\{ 1 - \frac{x(-12x+13)}{6(1-x^2)} \right\} \cdot 3\sqrt{1-x^2} \\ &= \frac{6x^2 - 13x + 6}{6(1-x^2)} \cdot 3\sqrt{1-x^2} \\ &= \frac{6x^2 - 13x + 6}{2\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

である。

問 4

$0 < x < \frac{2}{3}$ における $S(x)$ の増減を調べる。

$$\begin{aligned} S'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(12x-13)\sqrt{1-x^2} - (6x^2-13x+6) \left\{ \frac{1}{2} \cdot (-2x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \right\}}{1-x^2} \\ &= \frac{(12x-13)(1-x^2) + x(6x^2-13x+6)}{2(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{-6x^3+18x-13}{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

であり, $S'(x)$ の正負を調べる。 $0 < x < \frac{2}{3}$ において, $S'(x)$ の分母は正であるため, 分子の正負を調べる。 $f(x) = -6x^3 + 18x - 13$ とおくと,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -18x^2 + 18 \\ &= -18(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

となる。よって, $0 < x < \frac{2}{3}$ の範囲において, $f'(x) > 0$ であり, $f(x)$ は単調に増加する。ま

た, $f\left(\frac{2}{3}\right) < 0$ であることから, $0 < x < \frac{2}{3}$ の範囲において, $f(x) < 0$ となる。したがって,

$0 < x < \frac{2}{3}$ の範囲において $S'(x) < 0$ となり, $S(x)$ は単調に減少する。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

問 1

ア	イ	ウ
$m+2n$	$m+n$	m

問 2 $R_n = e^n$

問 3 $S_n(k) = \frac{n^k}{e^n \cdot k!}$

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N^4} \sum_{n=1}^N R_n \cdot S_n(3) \right\} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N^4} \sum_{n=1}^N e^n \cdot \frac{n^3}{6e^n} \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{6N^4} \sum_{n=1}^N n^3 \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{6N^4} \left\{ \frac{1}{2} N(N+1) \right\}^2 \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^2(N+1)^2}{24N^4} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{N}\right)^2}{24} \\ &= \frac{1}{24} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N^4} \sum_{n=1}^N R_n \cdot S_n(3) \right\} = \frac{1}{24}$$

〔解説〕

問 1

袋の中から1個の赤玉を取り出す確率は、

$$\frac{n}{m+n}$$

である。この試行において赤玉が k 回取り出される確率 $p_{m,n}(k)$ は、

$$p_{m,n}(k) = \left(\frac{n}{m+n} \right)^k \left(\frac{m}{m+n} \right)^{m-k} {}_m\text{C}_k$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} q_{m,n} &= \sum_{k=0}^m 2^k \cdot p_{m,n}(k) \\ &= \sum_{k=0}^m 2^k \cdot \left\{ \left(\frac{n}{m+n} \right)^k \left(\frac{m}{m+n} \right)^{m-k} {}_m\text{C}_k \right\} \\ &= \sum_{k=0}^m {}_m\text{C}_k \left(\frac{2n}{m+n} \right)^k \left(\frac{m}{m+n} \right)^{m-k} \end{aligned}$$

を得る。二項定理を用いると、

$$\begin{aligned} q_{m,n} &= \left\{ \left(\frac{2n}{m+n} \right) + \left(\frac{m}{m+n} \right) \right\}^m \\ &= \left(\frac{m+2n}{m+n} \right)^m \end{aligned}$$

となる。

問 2

$$\begin{aligned} R_n &= \lim_{m \rightarrow \infty} q_{m,n} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{m+2n}{m+n} \right)^m \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{2n}{m}}{1 + \frac{n}{m}} \right)^m \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2n}{m} \right)^{\frac{m}{2n} \cdot 2n} \left(1 + \frac{n}{m} \right)^{\frac{m}{n} \cdot (-n)} \\ &= e^{2n} \cdot e^{-n} \\ &= e^n \end{aligned}$$

となる。

問 3

$$\begin{aligned} S_n(k) &= \lim_{m \rightarrow \infty} p_{m,n}(k) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{m+n} \right)^k \left(\frac{m}{m+n} \right)^{m-k} {}_m\text{C}_k \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{m} \right)^k \left(\frac{m}{m+n} \right)^m \frac{m \cdot (m-1) \cdots (m-k+1)}{k!} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} n^k \left(1 + \frac{n}{m} \right)^{\frac{m}{n} \cdot (-n)} \frac{1}{k!} \left\{ 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{m} \right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{m} \right) \right\} \\ &= n^k e^{-n} \frac{1}{k!} \\ &= \frac{n^k}{e^n \cdot k!} \end{aligned}$$

である。

【Ⅲ】

【解答】

問 1 $K(a)=\frac{1+e^{-a\pi}}{1+a^2}$

問 2

$-\frac{b}{n}=m$ とおく。 $n\rightarrow\infty$ のとき、 $m\rightarrow-0$ である。よって、

$$\begin{aligned}\lim_{n\rightarrow\infty}n\left(1-e^{-\frac{b}{n}}\right)&=\lim_{m\rightarrow-0}\left(-\frac{b}{m}\right)\left(1-e^m\right)\\&=\lim_{m\rightarrow-0}b\frac{e^m-1}{m}\\&=b\end{aligned}$$

となる。

(答) $\lim_{n\rightarrow\infty}n\left(1-e^{-\frac{b}{n}}\right)=b$

問 3 $I_n=\frac{n}{1+n^2}\cdot e^{-n\pi}\cdot\left(1-e^{-\pi}\right)\cdot\frac{1+e^{-\frac{\pi}{n}}}{1-e^{-\frac{\pi}{n}}}$

問 4

$0\leq\left|\cos(nx)\right|\leq 1$ であるから、

$$\frac{\left|\sin(nx)\right|}{e^x+1}\leq\frac{\left|\sin(nx)\right|}{e^x+\left|\cos(nx)\right|}\leq\frac{\left|\sin(nx)\right|}{e^x}$$

である。各辺を $n\pi$ から $(n+1)\pi$ の範囲で積分し、 $e^{n\pi}$ をかけると

$$\begin{aligned}e^{n\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\left|\sin(nx)\right|}{e^x+1}dx&\leq e^{n\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\left|\sin(nx)\right|}{e^x+\left|\cos(nx)\right|}dx\leq e^{n\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\left|\sin(nx)\right|}{e^x}dx\\ \therefore e^{n\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\left|\sin(nx)\right|}{e^x+1}dx&\leq e^{n\pi}J_n\leq e^{n\pi}I_n\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}\end{aligned}$$

を得る。ここで、 $e^{n\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\left|\sin(nx)\right|}{e^x+1}dx$ について考える。 $\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{1}{1+e^{-x}}$ は単調増加するため、

$n\pi\leq x\leq (n+1)\pi$ において $\frac{e^x}{e^x+1}\geq\frac{e^{n\pi}}{e^{n\pi}+1}$ であることを用いると

$$\begin{aligned}e^{n\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\left|\sin(nx)\right|}{e^x+1}dx&=e^{n\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{e^x}{e^x+1}\cdot\frac{\left|\sin(nx)\right|}{e^x}dx\\&\geq e^{n\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{e^{n\pi}}{e^{n\pi}+1}\cdot\frac{\left|\sin(nx)\right|}{e^x}dx\\&=\frac{e^{n\pi}}{e^{n\pi}+1}\cdot e^{n\pi}I_n\end{aligned}$$

となる。したがって、 $e^{n\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\left|\sin(nx)\right|}{e^x+1}dx\geq\frac{e^{n\pi}}{e^{n\pi}+1}\cdot e^{n\pi}I_n$ が成り立つが、これと①より

$$\frac{e^{n\pi}}{e^{n\pi}+1}\cdot e^{n\pi}I_n\leq e^{n\pi}J_n\leq e^{n\pi}I_n\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{2}$$

を得る。ここで、問 2、問 3 の結果を用いると、

$$\begin{aligned}\lim_{n\rightarrow\infty}e^{n\pi}I_n&=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}\cdot\left(1-e^{-\pi}\right)\cdot\frac{1+e^{-\frac{\pi}{n}}}{n\left(1-e^{-\frac{\pi}{n}}\right)}\\&=\frac{2\left(1-e^{-\pi}\right)}{\pi}\\\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{e^{n\pi}}{e^{n\pi}+1}\cdot e^{n\pi}I_n&=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{1+e^{-n\pi}}\cdot e^{n\pi}I_n\\&=\frac{2\left(1-e^{-\pi}\right)}{\pi}\end{aligned}$$

である。したがって、②を踏まえると、はさみうちの原理より

$$\lim_{n\rightarrow\infty}e^{n\pi}J_n=\frac{2\left(1-e^{-\pi}\right)}{\pi}$$

を得る。

(答) $\lim_{n\rightarrow\infty}e^{n\pi}J_n=\frac{2\left(1-e^{-\pi}\right)}{\pi}$

【解説】

問 1

$$\begin{aligned}K(a)&=\int_0^\pi e^{-ax}\sin xdx\\&=\int_0^\pi\left(-\frac{e^{-ax}}{a}\right)'\sin xdx\\&=\left[\left(-\frac{e^{-ax}}{a}\right)\sin x\right]_0^\pi-\int_0^\pi\left(-\frac{e^{-ax}}{a}\right)\cos xdx\\&=\frac{1}{a}\int_0^\pi\left(-\frac{e^{-ax}}{a}\right)'\cos xdx\\&=\frac{1}{a}\left\{\left[\left(-\frac{e^{-ax}}{a}\right)\cos x\right]_0^\pi-\int_0^\pi\left(-\frac{e^{-ax}}{a}\right)(-\sin x)dx\right\}\\&=\frac{1}{a}\left\{\left(\frac{e^{-a\pi}}{a}+\frac{1}{a}\right)-\frac{1}{a}K(a)\right\}\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{a^2}\right)K(a)&=\frac{1}{a^2}\left(e^{-a\pi}+1\right)\\ \therefore K(a)&=\frac{1+e^{-a\pi}}{1+a^2}\end{aligned}$$

である。

問 3

$n(x-n\pi)=t$ とおくと、 $x=\frac{t}{n}+n\pi$ であり、 $dx=\frac{1}{n}dt$ となる。また、

$$\begin{array}{c|cc}x&n\pi&\rightarrow\\t&0&\rightarrow\end{array}\frac{(n+1)\pi}{n\pi}$$

となるため、

$$\begin{aligned}I_n&=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}\left|\sin(nx)\right|dx\\&=\int_0^{n\pi}e^{-\frac{t}{n}-n\pi}\left|\sin\left(t+n^2\pi\right)\right|\cdot\frac{1}{n}dt\\&=\frac{e^{-n\pi}}{n}\int_0^{n\pi}e^{-\frac{t}{n}}\left|(-1)^{n^2}\sin t\right|dt\\&=\frac{e^{-n\pi}}{n}\int_0^{n\pi}e^{-\frac{t}{n}}\left|\sin t\right|dt\\&=\frac{e^{-n\pi}}{n}\sum_{k=1}^n\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}e^{-\frac{t}{n}}\left|\sin t\right|dt\\&=\frac{e^{-n\pi}}{n}\sum_{k=1}^n\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}e^{-\frac{t}{n}}\cdot(-1)^{k-1}\sin tdt\end{aligned}$$

を得る。 $u=t-(k-1)\pi$ とおくと、 $t=u+(k-1)\pi$ であり、 $dt=du$ となる。また、

$$\begin{array}{c|cc}t&(k-1)\pi&\rightarrow\\u&0&\rightarrow\end{array}\frac{k\pi}{\pi}$$

となるから、

$$\begin{aligned}I_n&=\frac{e^{-n\pi}}{n}\sum_{k=1}^n\int_0^\pi e^{-\frac{u+(k-1)\pi}{n}}\cdot(-1)^{k-1}\sin\{u+(k-1)\pi\}du\\&=\frac{e^{-n\pi}}{n}\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\cdot e^{-\frac{k-1}{n}\pi}\int_0^\pi e^{-\frac{u}{n}}\cdot(-1)^{k-1}\sin udu\\&=\frac{e^{-n\pi}}{n}\sum_{k=1}^ne^{-\frac{k-1}{n}\pi}\int_0^\pi e^{-\frac{u}{n}}\cdot\sin udu\\&=\frac{e^{-n\pi}}{n}\sum_{k=1}^ne^{-\frac{k-1}{n}\pi}\cdot K\left(\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{e^{-n\pi}}{n}\sum_{k=1}^ne^{-\frac{k-1}{n}\pi}\cdot\frac{n^2\left(e^{\frac{\pi}{n}}+1\right)}{1+n^2}\\&=\frac{e^{-n\pi}}{n}\cdot\frac{1-\left(e^{-\frac{\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{-\frac{\pi}{n}}}\cdot\frac{n^2\left(e^{-\frac{\pi}{n}}+1\right)}{1+n^2}\\&=\frac{n}{1+n^2}\cdot e^{-n\pi}\cdot\left(1-e^{-\pi}\right)\cdot\frac{1+e^{-\frac{\pi}{n}}}{1-e^{-\frac{\pi}{n}}}\end{aligned}$$

である。

【Ⅳ】

〔解答〕

問 1

$\overline{a}$	$\overline{1}$
$-t$	$\sqrt{1+t^2}$

問 2

$\overline{7}$
$\sqrt{k}$

問 3 $QR=2\sqrt{1+2t^2}$, $ST=\frac{2(k+t^2)}{k(k^2+k+t^2)}\sqrt{k+1}$

問 4

問 3 より,

$$\begin{aligned}f_k(t) &= \frac{ST}{QR} \\&= \frac{\sqrt{k+1}}{k} \cdot \frac{k+t^2}{(k^2+k+t^2)\sqrt{1+2t^2}}\end{aligned}$$

である。

$$g(t)=\frac{k+t^2}{(k^2+k+t^2)\sqrt{1+2t^2}}$$

とおくと $\frac{\sqrt{k+1}}{k}>0$ であるから、 $f_k(t)$ が極値をとるとは、0 より大きい実数 t に対して $g'(t)$

の符号が変化することと同値である。 $t>0$ のもとで $g'(t)$ を求めると、

$$\begin{aligned}g'(t) &= \frac{2t(k^2+k+t^2)\sqrt{1+2t^2}-(k+t^2)\left\{2t\sqrt{1+2t^2}+(k^2+k+t^2)\cdot\frac{1}{2}(1+2t^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4t\right\}}{(k^2+k+t^2)^2(1+2t^2)} \\&= \frac{2t\left[(k^2+k+t^2)(1+2t^2)-(k+t^2)\{(1+2t^2)+(k^2+k+t^2)\}\right]}{(k^2+k+t^2)^2(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}} \\&= \frac{2t}{(k^2+k+t^2)^2(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\{-t^4+(k^2-2k)t^2-k^3\}\end{aligned}$$

となる。 $k>0, t>0$ より、 $\frac{2t}{(k^2+k+t^2)^2(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}}>0$ であるから、 $g'(t)$ の符号は

$-t^4+(k^2-2k)t^2-k^3$ の符号に一致する。したがって、 $t^2=u$ において、

$$h(u)=-u^2+(k^2-2k)u-k^3$$

の符号が $u>0$ で変化する条件を求めればよい。 $h(u)$ の符号が変化するには、 $h(u)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつ必要がある。よって、 $h(u)$ の判別式を D とすると、 $D>0$ である必要があり、

$$\begin{aligned}D &> 0 \\&\Leftrightarrow (k^2-2k)^2-4k^3 > 0 \\&\Leftrightarrow k^2(k^2-8k+4) > 0 \\&\therefore 0 < k < 4-2\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3} < k \quad (\because k > 0) \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}\end{aligned}$$

となる。 $u>0$ で符号が変化するには、 $h(0)<0$ であることから、軸が正となればよい。したがって、

$$\begin{aligned}\frac{k^2-2k}{2} &> 0 \\&\Leftrightarrow k(k-2) > 0 \\&\therefore 2 < k \quad (\because k > 0) \qquad \cdots \cdots \textcircled{4}\end{aligned}$$

を得る。③、④より、 $f_k(t)$ が極値をとるための k に対する必要十分条件は、

$$4+2\sqrt{3} < k$$

である。

$$\text{(答)} \quad 4+2\sqrt{3} < k$$

〔解説〕

問 1

双曲線 $z^2-x^2=1$ 上の点 $P(t, 0, \sqrt{1+t^2})$ での接線の方程式は

$$-tx+\sqrt{1+t^2}z=1$$

である。

問 2

$$C_2: \frac{x^2}{\frac{1}{k^2}}+\frac{y^2}{\frac{k+1}{k^2}}=1 \text{ であり、} k>0 \text{ より、} \frac{1}{k^2}<\frac{k+1}{k^2} \text{ に注意すると、楕円 } C_2 \text{ の焦点のうち } y \text{ 座標}$$

が正の点である F は $\left(0, \sqrt{\frac{k+1}{k^2}-\frac{1}{k^2}}, 0\right)$ 、すなわち $\left(0, \frac{1}{\sqrt{k}}, 0\right)$ となる。直線 L_1 と x 軸、 z 軸の

交点はそれぞれ

$$\left(-\frac{1}{t}, 0, 0\right), \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$$

である。平面 π は 3 点 $\left(0, \frac{1}{\sqrt{k}}, 0\right), \left(-\frac{1}{t}, 0, 0\right), \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$ を通るから、平面 π の方程式は

$$\begin{aligned}\frac{1}{-\frac{1}{t}}x+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{k}}}y+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}z &= 1 \\-\frac{1}{t}x+\frac{1}{\sqrt{k}}y+\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}z &= 1 \\&\therefore -tx+\sqrt{k}y+\sqrt{1+t^2}z=1\end{aligned}$$

である。

問 3

Q は L_1 と直線 $x=z$ の交点であるため、Q の x 座標は

$$\begin{aligned}-tx+\sqrt{1+t^2}x &= 1 \\&\therefore x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}-t}\end{aligned}$$

となり、Q $\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}-t}, 0, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}-t}\right)$ である。R は L_1 と直線 $x=-z$ の交点であるから、R の x

座標は

$$\begin{aligned}-tx-\sqrt{1+t^2}x &= 1 \\&\therefore x=-\frac{1}{\sqrt{1+t^2}+t}\end{aligned}$$

となり、R $\left(-\frac{1}{\sqrt{1+t^2}+t}, 0, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}+t}\right)$ である。したがって、

$$\begin{aligned}QR^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}-t}+\frac{1}{\sqrt{1+t^2}+t}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}-t}-\frac{1}{\sqrt{1+t^2}+t}\right)^2 \\&= \left\{\frac{(\sqrt{1+t^2}+t)+(\sqrt{1+t^2}-t)}{(\sqrt{1+t^2}-t)(\sqrt{1+t^2}+t)}\right\}^2+\left\{\frac{(\sqrt{1+t^2}+t)-(\sqrt{1+t^2}-t)}{(\sqrt{1+t^2}-t)(\sqrt{1+t^2}+t)}\right\}^2 \\&= 4(1+t^2)+4t^2 \\&= 4(1+2t^2)\end{aligned}$$

となり、

$$QR=2\sqrt{1+2t^2}$$

を得る。 L_2 は平面 π と xy 平面の交線であるから、問 2 より L_2 の方程式は

$$\begin{aligned}-tx+\sqrt{k}y &= 1 \\&\therefore y=\frac{1}{\sqrt{k}}(1+tx) \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。楕円 $C_2: k^2x^2+\frac{k^2}{k+1}y^2=1$ に①を代入すると、

$$\begin{aligned}k^2x^2+\frac{k^2}{k+1}\cdot\frac{1}{k}(1+tx)^2 &= 1 \\&\Leftrightarrow k^2x^2+\frac{k}{k+1}(t^2x^2+2tx+1)=1 \\&\Leftrightarrow k^2(k+1)x^2+k(t^2x^2+2tx+1)=k+1 \\&\therefore k(k^2+k+t^2)x^2+2ktx-1=0 \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

を得る。②の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(kt)^2+k(k^2+k+t^2)$$

となる。 $k>0, t\geq 0$ であるから、 $D>0$ である。よって、②は異なる 2 つの実数解をもつ。②

の 2 つの解を α, β ($\alpha<\beta$) とすると、直線 L_2 と楕円 C_2 の交点は

$$\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{k}}(1+t\alpha), 0\right), \left(\beta, \frac{1}{\sqrt{k}}(1+t\beta), 0\right)$$

となる。ここで、②において解と係数の関係から

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-\frac{2t}{k^2+k+t^2} \\ \alpha\beta=-\frac{1}{k(k^2+k+t^2)}\end{cases}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}ST^2 &= (\beta-\alpha)^2+\left\{\frac{1}{\sqrt{k}}(1+t\beta)-\frac{1}{\sqrt{k}}(1+t\alpha)\right\}^2 \\&= (\beta-\alpha)^2+\frac{t^2}{k}(\beta-\alpha)^2 \\&= \left(1+\frac{t^2}{k}\right)(\beta-\alpha)^2 \\&= \frac{k+t^2}{k}\cdot\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\} \\&= \frac{k+t^2}{k}\cdot\left\{\left(\frac{2t}{k^2+k+t^2}\right)^2+\frac{4}{k(k^2+k+t^2)}\right\} \\&= \frac{4(k+t^2)\{kt^2+(k^2+k+t^2)\}}{k^2(k^2+k+t^2)^2} \\&= \frac{4(k+t^2)^2(k+1)}{k^2(k^2+k+t^2)^2}\end{aligned}$$

を得る。 $k>0, t\geq 0$ であるから、

$$ST=\frac{2(k+t^2)}{k(k^2+k+t^2)}\sqrt{k+1}$$

となる。