

問題 1

問 1

条件より,

$$a_n = c + (n-1)d$$

であり,

$$\begin{aligned} S_a(n) &= \sum_{k=1}^n \{c + (k-1)d\} \\ &= (c-d)n + \frac{n(n+1)}{2}d \\ &= \frac{n}{2}\{2c + (n-1)d\} \end{aligned}$$

となる。また,

$$b_n = tr^{n-1}$$

より, 等比数列の和の公式から,

$$S_b(n) = \begin{cases} \frac{t(r^n - 1)}{r - 1} & (r \neq 1) \\ nt & (r = 1) \end{cases}$$

となる。

(答) $a_n = c + (n-1)d$

$$S_a(n) = \frac{n}{2}\{2c + (n-1)d\}$$

$$b_n = tr^{n-1}$$

$$S_b(n) = \begin{cases} \frac{t(r^n - 1)}{r - 1} & (r \neq 1) \\ nt & (r = 1) \end{cases}$$

問 2

問 1 の結果より,

$$b_n = tr^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_{10} b_n &= \log_{10} (tr^{n-1}) \\ &= \log_{10} t + (n-1)\log_{10} r \\ &= \alpha + (n-1)\beta \end{aligned}$$

であるから,

$$\beta = \frac{1}{n-1}(\log_{10} b_n - \alpha)$$

となる。

(答) $\beta = \frac{1}{n-1}(\log_{10} b_n - \alpha)$

問 3

(1)式と(2)式より,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2d} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2d} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_n \\ h_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2d} & -\frac{1}{2d} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_n \\ h_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるから,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2d} & -\frac{1}{2d} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

である。

(答) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2d} & -\frac{1}{2d} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

問 4

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{1}{2d} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} &= \frac{1}{\frac{1}{2d} \cdot \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2d} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2d & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから, (1)式より,

$$\begin{pmatrix} 2d & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2d} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2d & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2da_n \\ 2b_n \end{pmatrix}$$

となる。よって問 1 の結果より,

$$\begin{cases} p_n = 2cd + (n-1)2d^2 \\ q_n = 2tr^{n-1} \end{cases}$$

となるから, $\{p_n\}$ は初項 $2cd$, 公差 $2d^2$ の等差数列となり, $\{q_n\}$ は初項 $2t$, 公比 r の等比数列

となる。

(証明終)

(答) $\{p_n\}$ の初項 $2cd$, 公差 $2d^2$

$\{q_n\}$ の初項 $2t$, 公比 r

問 5

問 3 の結果より,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2d} & -\frac{1}{2d} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_n \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} g_n \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2d} & -\frac{1}{2d} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\frac{1}{2d} \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2d}\right)} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2d} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d & 1 \\ -d & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} da_n + b_n \\ -da_n + b_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから, これと問 1 の結果より,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{da_n + b_n - (-da_n + b_n)}{2} \\ &= da_n \\ &= d\{c + (n-1)d\} \end{aligned}$$

となる。よって,

$$(n-1)d^2 + cd - \lambda = 0$$

であり, d についてこれを解くと,

$$d = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4\lambda(n-1)}}{2(n-1)}$$

となる。ここで, $n > 1$ より $n-1 > 0$ であり, また $g_n > h_n$ より

$$\lambda = \frac{g_n - h_n}{2}$$

$$> 0$$

であるから,

$$-c - \sqrt{c^2 + 4\lambda(n-1)} < 0 < -c + \sqrt{c^2 + 4\lambda(n-1)}$$

である。よって $d > 0$ より,

$$d = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4\lambda(n-1)}}{2(n-1)}$$

となる。

(答) $d = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4\lambda(n-1)}}{2(n-1)}$

問 6

このとき, 問 1 の結果より,

$$\begin{aligned} a_n &= 4 + 3(n-1) \\ &= 3n + 1 \end{aligned}$$

であるから, 選ばれた場合に事象 E となるような a_n の条件は,

$$\begin{aligned} 50 &< a_n < 100 \\ \Leftrightarrow 50 &< 3n + 1 < 100 \\ \Leftrightarrow 16.3 \cdots &< n < 33 \\ \therefore n &= 17, 18, \cdots, 32 \end{aligned}$$

であり, 選ばれた場合に事象 F となるような a_n の条件は,

$$\begin{aligned} a_n &< 800 \\ \Leftrightarrow 3n + 1 &< 800 \\ \Leftrightarrow n &< 26.3 \cdots \\ \therefore n &= 1, 2, \cdots, 26 \end{aligned}$$

である。よって選ばれた場合に事象 $E \cup F$ となるような a_n の条件は,

$$n = 1, 2, \cdots, 32$$

であるから,

$$\begin{aligned} P(E) &= \frac{16}{100} \\ &= \frac{4}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(F) &= \frac{26}{100} \\ &= \frac{13}{50} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(E \cup F) &= \frac{32}{100} \\ &= \frac{8}{25} \end{aligned}$$

となる。

(答) $P(E) = \frac{4}{25}, P(F) = \frac{13}{50}, P(E \cup F) = \frac{8}{25}$

問題 2

問 1

$f(x)$ は $(2, 1)$ を頂点とする 2 次関数であるから、ある実数 a を用いて、

$$f(x) = a(x-2)^2 + 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

と表せる。ここで、この関数は点 $(0, 5)$ を通るので、

$$\begin{aligned} 5 &= a(0-2)^2 + 1 \\ \Leftrightarrow 4a &= 4 \\ \therefore a &= 1 \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。よって、①、②より、

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)^2 + 1 \\ &= x^2 - 4x + 5 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad f(x) = x^2 - 4x + 5$$

問 2

問 1 の結果より、

$$\begin{aligned} g(x) &= -x(x^2 - 4x + 5) - 4x^2 + 8x - 2 \\ &= -x^3 + 3x - 2 \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} g'(x) &= -3x^2 + 3 \quad \cdots \textcircled{4} \\ &= -3(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

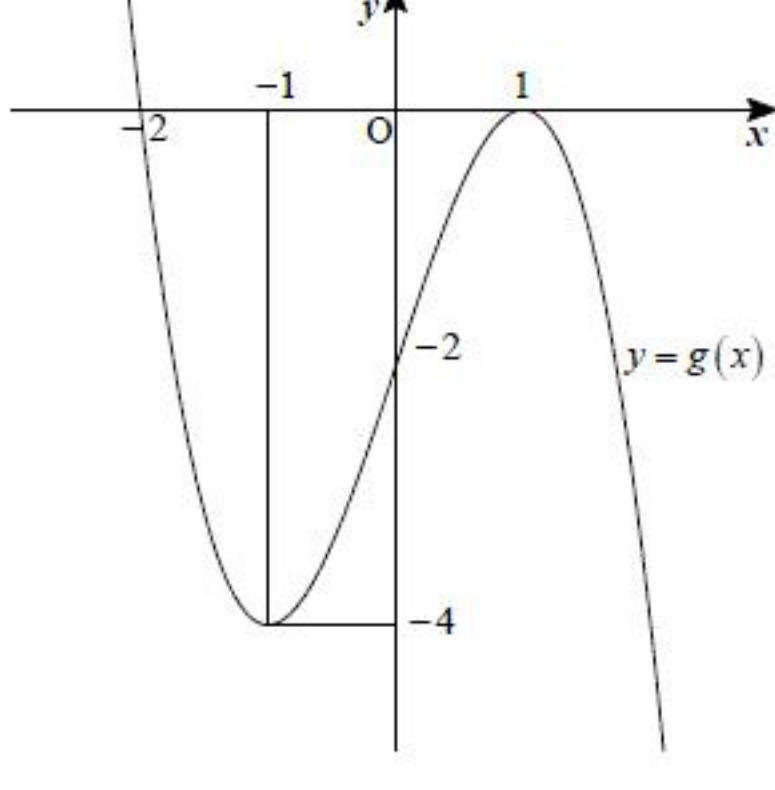
となり、 $y = g(x)$ の増減表は次表のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$	極小 -4	$\nearrow$	極大 0	$\searrow$

また、①より、

$$g(x) = -(x+2)(x-1)^2$$

であるから、 $y = g(x)$ のグラフは次図のようになる。



(答) 増減表 前表

グラフ 前図

問 3

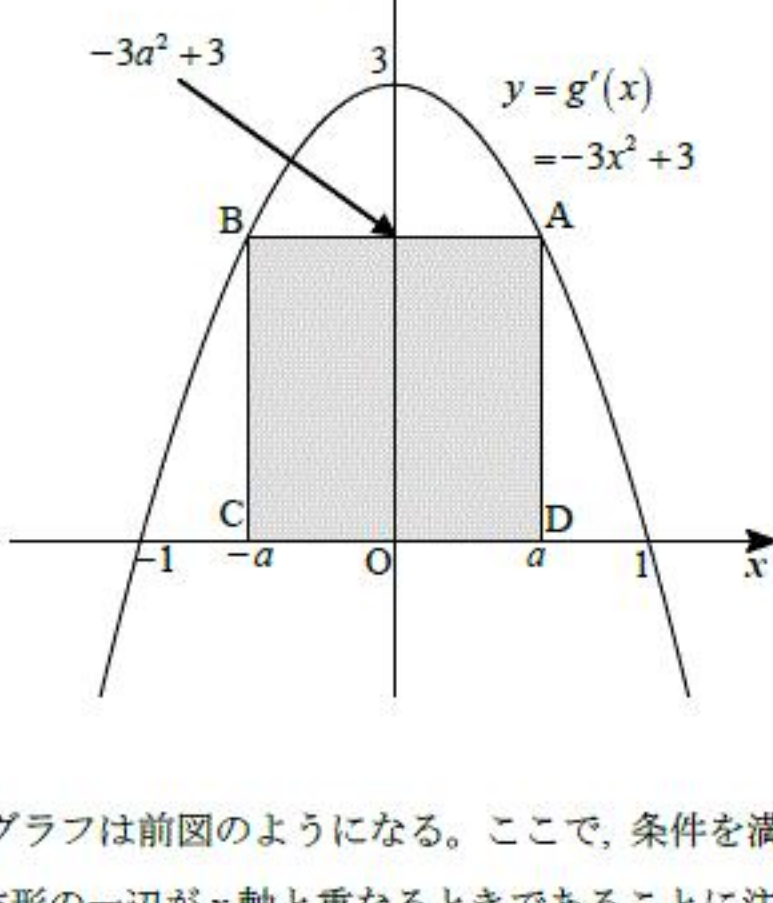
③、④より、求める接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y - (-t^3 + 3t - 2) &= (-3t^2 + 3)(x - t) \\ \therefore y &= -3(t^2 - 1)x + 2t^3 - 2 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = -3(t^2 - 1)x + 2t^3 - 2$$

問 4



④より、 $y = g'(x)$ のグラフは前図のようになる。ここで、条件を満たす長方形の中で面積が最大となるのは、長方形の一边が x 軸と重なるときであることに注意して、前図のように長方形の頂点を

$$\begin{aligned} A(a, -3a^2 + 3) \\ B(-a, -3a^2 + 3) \quad \cdots \textcircled{5} \\ C(-a, 0) \\ D(a, 0) \end{aligned}$$

と定める。但し、

$$0 < a < 1$$

とする。このときの長方形 $ABCD$ の面積を $S(a)$ とおくと、 $0 < a < 1$ において $S(a)$ を最大とする a を⑤に代入して得られる 4 点が求める座標であり、またこのときの $S(a)$ が求める面積となる。ここで、

$$\begin{aligned} S(a) &= \{a - (-a)\} \cdot (-3a^2 + 3) \\ &= -6a^3 + 6a \quad \cdots \textcircled{6} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} S'(a) &= -18a^2 + 6 \\ &= -18 \left(a + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(a - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

であるから、 $0 < a < 1$ における $S(a)$ の増減表は次表のようになる。

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(1)
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって $S(a)$ が最大となるのは

$$a = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

のときであるから、⑤より、求める 4 つの頂点の座標は、

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 2 \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 2 \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \right)$$

であり、また⑥よりこのときの面積は、

$$\begin{aligned} S \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) &= -6 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^3 + 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \begin{aligned} &\text{4 つの頂点の座標} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 2 \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 2 \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \right) \\ &\text{面積} \quad \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

問 5

問 3 の結果より、点 (x, y) が $y = g(x)$ の $x = t$ における接線上にあるとき、

$$\begin{aligned} y &= -3(t^2 - 1)x + 2t^3 - 2 \\ \Leftrightarrow 2t^3 - 3xt^2 + 3x - y - 2 &= 0 \quad \cdots \textcircled{7} \end{aligned}$$

が成り立つ。よって点 (x, y) から曲線 $y = g(x)$ に異なる 3 本の接線が引けることは、⑦式を t について解いたとき、異なる 3 つの実数解をもつことと同値である。

⑦式の左辺を $h(t)$ とおくと、

$$\begin{aligned} h'(t) &= 6t^2 - 6xt \\ &= 6t(t - x) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $h(t) = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつのは、曲線 $y = h(t)$ が極大値と極小値を持ち、かつその正負が異なるときであるから、求める条件は、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x \neq 0 \\ h(0) \cdot h(x) < 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x \neq 0 \\ (3x - y - 2)(-x^3 + 3x - y - 2) < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

となり、また $x = 0$ のとき

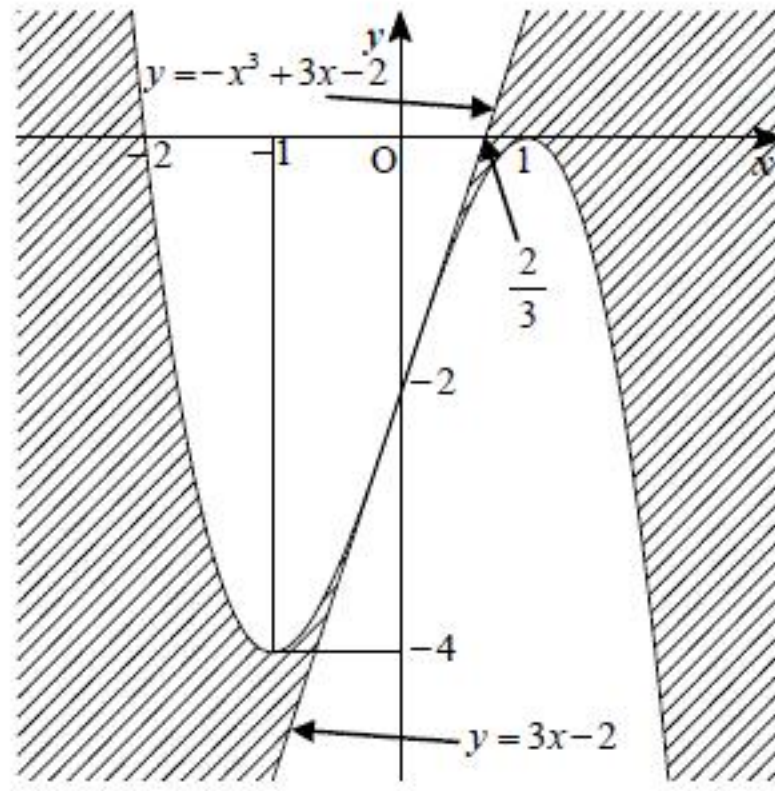
$$(3x - y - 2)(-x^3 + 3x - y - 2) = (-y - 2)^2$$

$$\geq 0$$

となることに注意すると、求める条件は

$$(3x - y - 2)(-x^3 + 3x - y - 2) < 0$$

である。ここで、問 2 と問 3 の結果より、 $y = -x^3 + 3x - 2$ すなわち $y = g(x)$ の $x = 0$ における接線が $y = 3x - 2$ であることに注意すると、条件を満たす点 (x, y) の範囲は次図の斜線部である。(但し境界は含まない。)



$$(\text{答}) \quad \text{不等式} \quad (3x - y - 2)(-x^3 + 3x - y - 2) < 0$$

図示 前図斜線部(但し境界は含まない)