

問題 1

問 1

$$\theta = \frac{\pi}{6}, a = -\sqrt{3}, b = 1 \quad \text{を代入して} \quad \begin{cases} 1 + \sqrt{3} x + 1 - \sqrt{3} y = -\sqrt{3} & \dots \textcircled{1} \\ \sqrt{3} - 1 x + 1 + \sqrt{3} y = 1 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \quad \text{より} \quad y = -\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} x - \frac{\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} x + \frac{\sqrt{3} (1 + \sqrt{3})}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad \text{より} \quad y = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} x + \frac{1}{1 + \sqrt{3}} = \sqrt{3} - 2 x + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$\text{よってこれらを連立して,} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(\text{答}) \quad f(x) = 2 + \sqrt{3} x + \frac{\sqrt{3} (1 + \sqrt{3})}{2}, \quad x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$$

問 2

(1) 式の両辺に $\sin \theta - \cos \theta$ をかけて

$$2 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta x + 2 (1 - 2 \sin \theta \cos \theta) y = a (\sin \theta - \cos \theta)$$

(2) 式の両辺に $\cos \theta + \sin \theta$ をかけて

$$2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta x + 2 (1 + 2 \sin \theta \cos \theta) y = b (\cos \theta + \sin \theta)$$

$$\text{両辺加えて } y = \frac{a (\sin \theta - \cos \theta) + b (\sin \theta + \cos \theta)}{4} \quad \text{となり,}$$

$$\text{これより } x = \frac{a (\sin \theta + \cos \theta) - b (\sin \theta - \cos \theta)}{4}$$

$$\text{よって, } |\vec{q}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{であり,}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{a^2 (1 + 2 \sin \theta \cos \theta) - 2ab (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) + b^2 (1 - 2 \sin \theta \cos \theta)}{16} \\ &\quad + \frac{a^2 (1 - 2 \sin \theta \cos \theta) + 2ab (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) + b^2 (1 + 2 \sin \theta \cos \theta)}{16} \\ &= \frac{a^2 + b^2}{8} \end{aligned}$$

$$\text{であるから, } |\vec{q}| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

また,

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{q} &= xa + yb \\ &= \frac{a^2 (\sin \theta + \cos \theta) - ab (\sin \theta - \cos \theta)}{4} + \frac{ab (\sin \theta - \cos \theta) + b^2 (\sin \theta + \cos \theta)}{4} \\ &= \frac{a^2 + b^2}{4} (\sin \theta + \cos \theta) \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad |\vec{q}| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}, \quad \vec{p} \cdot \vec{q} = \frac{a^2 + b^2}{4} (\sin \theta + \cos \theta)$$

問 3

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = \frac{a^2 + b^2}{4} (\sin \theta + \cos \theta) \quad \text{において,}$$

右辺の分母・分子を $\cos \theta$ でわると

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = \frac{a^2 + b^2}{4} \frac{\tan \theta + 1}{\cos \theta} \times \cos \theta \quad \text{となるので,}$$

$$\vec{p} \cdot \vec{q}^2 = \frac{a^2 + b^2}{16} \frac{(\tan \theta + 1)^2}{\cos^2 \theta} \times \cos^2 \theta = \frac{4 (\tan \theta + 1)^2}{1 + \tan^2 \theta}$$

$\vec{p} \cdot \vec{q} = \sqrt{6}$ のとき, 上の式に代入して,

$$6 = \frac{4 (\tan \theta + 1)^2}{1 + \tan^2 \theta}$$

これを解いて $\tan \theta = 2 \pm \sqrt{3}$ となり,

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $\tan \theta > 0$ よって $\tan \theta = 2 \pm \sqrt{3}$ はどちらも成り立つ。

$$(\text{答}) \quad \vec{p} \cdot \vec{q}^2 = \frac{4 (\tan \theta + 1)^2}{1 + \tan^2 \theta}, \quad \tan \theta = 2 \pm \sqrt{3}$$

問 4

$a^2 + b^2 = 4$ のとき,

$$\vec{p} \cdot \vec{q}^2 = \frac{a^2 + b^2}{16} \frac{(\tan \theta + 1)^2}{\cos^2 \theta} \times \cos^2 \theta = \frac{(\tan \theta + 1)^2}{1 + \tan^2 \theta} = g(\theta) \quad \text{とおくと,}$$

$g(\theta) = \sin^2 \theta + \sin 2\theta + \cos^2 \theta = 1 + \sin 2\theta$ となるので,

$g'(\theta) = 2 \cos 2\theta$ より次の増減表をえる。

θ	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$g'(\theta)$		+	0	-	
$g(\theta)$		↗	極大	↘	

よって $g(\theta)$ が極大となるのは $\theta = \frac{\pi}{4}$ で, このとき $\tan \theta = 1$ である。

$$(\text{答}) \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \quad \tan \theta = 1$$

問 5

表の出る回数が X である確率を $P(X)$ とおくと,

$$P(0) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}, \quad P(1) = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}, \quad P(2) = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}, \quad P(3) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$\text{よって, } E(X) = \sum_{X=0}^3 X P(X) = \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3}{2}$$

$$\text{また, } V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{X=0}^3 X^2 P(X) - \frac{9}{4} = \frac{3}{8} + \frac{12}{8} + \frac{9}{8} - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

さらに,

$$Y = 2 + \sqrt{3} X + \frac{\sqrt{3} (1 + \sqrt{3})}{2} \quad \text{であるから,}$$

$$E(Y) = E \left(2 + \sqrt{3} X + \frac{\sqrt{3} (1 + \sqrt{3})}{2} \right) = 2 + \sqrt{3} E(X) + \frac{\sqrt{3} (1 + \sqrt{3})}{2} = \frac{9 + 4\sqrt{3}}{2}$$

$$V(Y) = V \left(2 + \sqrt{3} X + \frac{\sqrt{3} (1 + \sqrt{3})}{2} \right) = 2 + \sqrt{3}^2 V(X) = \frac{21 + 12\sqrt{3}}{4}$$

$$(\text{答}) \quad E(X) = \frac{3}{2}, \quad V(X) = \frac{3}{4}, \quad E(Y) = \frac{9 + 4\sqrt{3}}{2}, \quad V(Y) = \frac{21 + 12\sqrt{3}}{4}$$

問題 2

問 1

点 C X, Y とおくと、点 B は辺 AC の中点であるから、

$$\begin{cases} \frac{2+X}{2}=1 \\ \frac{f(2)+Y}{2}=-2 \end{cases} \quad \text{よって} \quad \begin{cases} X=0 \\ Y=-4a-2b-c-12 \end{cases}$$

(答) $C \ 0, -4a-2b-c-12$

問 2

$f'(x)=3x^2+2ax+b$ であるから、 $f'(2)=4a+b+12=0$

また、点 B は変曲点でもあるので、 $f''(x)=6x+2a$ より $f''(1)=6+2a=0$

よって、 $a=-3$ となり、 $b=0$ となる。

また、 $f(1)=a+b+c+1=-2$ であるから、 $c=0$ となる。

これらから、 $C \ 0, 0$ となる。

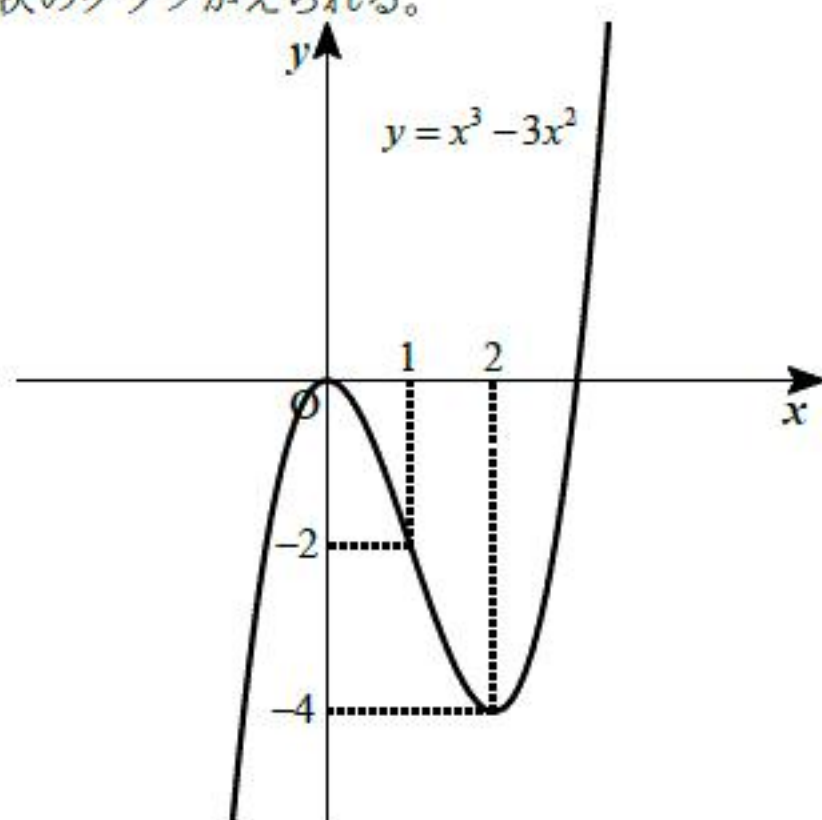
(答) $a=-3, b=0, c=0, C \ 0, 0$

問 3

$y=f(x)=x^3-3x^2$ より $y'=3x^2-6x=3x(x-2)$ となり、次の増減表をえる。

x	$\dots$	0	$\dots$	2	$\dots$
y'	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$

よって次のグラフがえられる。



… (答)

問 4

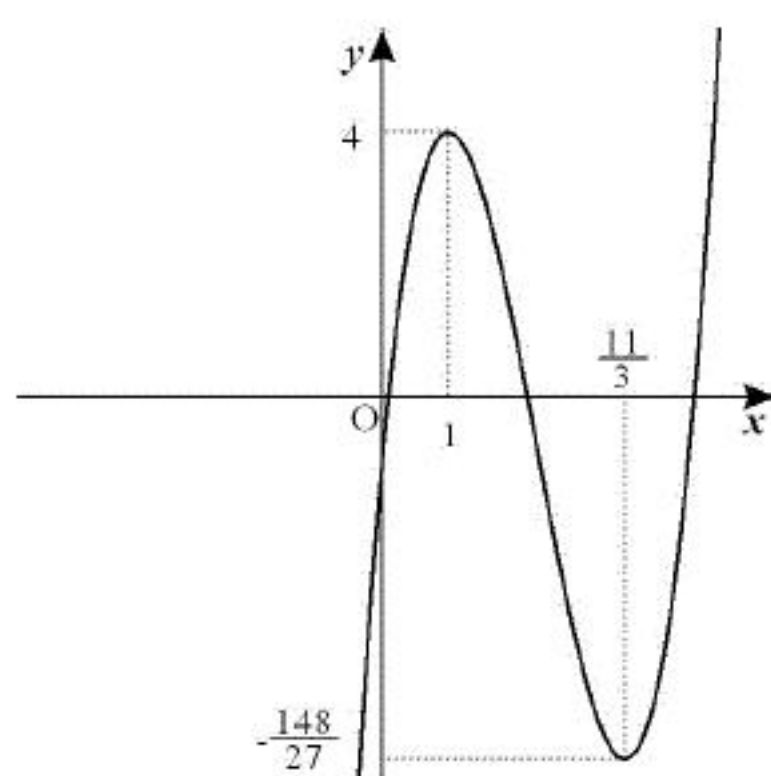
$x^3-6x^2+9x-2=x^2-2x+k-1$ より $x^3-7x^2+11x-1-k=0$

$x^3-7x^2+11x-1=k$ より $y=x^3-7x^2+11x-1$ とすると、

$y'=3x^2-14x+11=3(x-1)(x-\frac{11}{3})$ より次の増減表をえる。

x	$\dots$	1	$\dots$	$\frac{11}{3}$	$\dots$
y'	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\frac{148}{27}$	$\nearrow$

よって曲線 $y=x^3-7x^2+11x-1$ は、次のグラフのようになる。



この曲線と直線 $y=k$ が異なる 3 点で交わる条件は $-\frac{148}{27} < k < 4$ である。

(答) $-\frac{148}{27} < k < 4$

問 5

$x^3-7x^2+11x-1-k=0$ の解が $x=2$ であるから、 $k=1$

このとき、二つの曲線の交点は、 $x^3-7x^2+11x-2=0$ より

$$x-2 \quad x^2-5x+1=0 \quad \text{よって} \quad x=2, \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

よって求める面積は、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{5-\sqrt{21}}{2}}^2 (x^3-6x^2+9x-2) - (x^2-2x) \, dx \\ &\quad + \int_2^{\frac{5+\sqrt{21}}{2}} (x^2-2x) - (x^3-6x^2+9x-2) \, dx \\ &= \int_{\frac{5-\sqrt{21}}{2}}^2 (x^3-7x^2+11x-2) \, dx - \int_2^{\frac{5+\sqrt{21}}{2}} (x^3-7x^2+11x-2) \, dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 2x \right]_{\frac{5-\sqrt{21}}{2}}^2 - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 2x \right]_2^{\frac{5+\sqrt{21}}{2}} \end{aligned}$$

ここで、 $\frac{5+\sqrt{21}}{2}=\alpha, \frac{5-\sqrt{21}}{2}=\beta$ とおくと、

$$S = \frac{20}{3} - \frac{1}{12} \times 3(\alpha^4 + \beta^4 - 28\alpha^3 + \beta^3 + 66\alpha^2 + \beta^2 - 24\alpha + \beta) \quad \text{となる。}$$

$\begin{cases} \alpha^2-5\alpha+1=0 \\ \beta^2-5\beta+1=0 \end{cases}$ であることを利用して整理すると、

$$S = \frac{20}{3} + \frac{21\alpha + \beta - 4}{12} \quad \text{となることから、} \quad S = \frac{181}{12}$$

(答) $k=1$, 求める面積 $\frac{181}{12}$