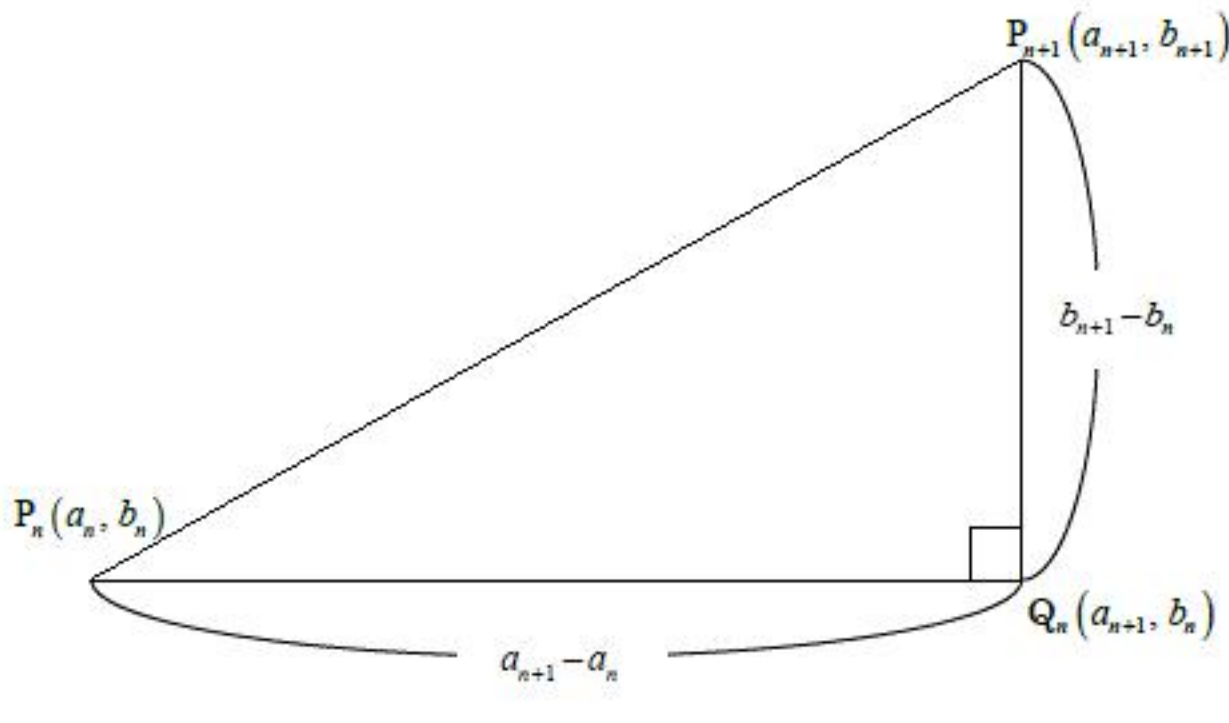


問題 1



問 1

直線 $P_n P_{n+1}$ の傾きが g_n で、 $g_n = cb_n$ が成り立つので、

$$g_n = \frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} = cb_n \quad \dots \textcircled{1}$$

また、 $\triangle P_n P_{n+1} Q_n$ の面積 h_n について、 $h_n = dg_n$ が成り立つので、

$$h_n = \frac{1}{2} \times (a_{n+1} - a_n) \times (b_{n+1} - b_n) = dg_n \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (a_{n+1} - a_n) (b_{n+1} - b_n) &= d \frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} \\ \Leftrightarrow (a_{n+1} - a_n)^2 &= 2d \quad (\because b_{n+1} - b_n \neq 0) \end{aligned}$$

となり、 $a_{n+1} > a_n$ であることから、

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{2d}$$

よって、数列 $\{a_n\}$ は等差数列であり、その公差は $\sqrt{2d}$ である。このとき、①より、

$$b_{n+1} - b_n = c(a_{n+1} - a_n)b_n = c\sqrt{2d}b_n$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} = (1 + c\sqrt{2d})b_n$$

なので、

$$b_{n+1} = (1 + c\sqrt{2d})b_n$$

となる。これより、数列 $\{b_n\}$ は等比数列であり、その公比は $1 + c\sqrt{2d}$ である。

さらに、

$$\begin{aligned} h_n &= dg_n \\ &= cdb_n \end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned} h_{n+1} &= cdb_{n+1} \\ &= cd(1 + c\sqrt{2d})b_n \\ &= (1 + c\sqrt{2d})h_n \end{aligned}$$

より、数列 $\{h_n\}$ も等比数列であり、その公比は $1 + c\sqrt{2d}$ である。

(答)	等差数列	$\{a_n\}$	公差	$\sqrt{2d}$
	等比数列	$\{b_n\}$	公比	$1 + c\sqrt{2d}$
		$\{h_n\}$		$1 + c\sqrt{2d}$

問 2

数列 $\{a_n\}$ は、公差 $\sqrt{2d}$ の等差数列なので、その一般項は、

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sqrt{2d}(n-1) \\ &= a + \sqrt{2d}(n-1) \quad (\because a_1 = a) \end{aligned}$$

である。また、初項から第 n 項までの和は、

$$\sum_{k=1}^n \{a + \sqrt{2d}(k-1)\} = an + \sqrt{2d} \frac{n(n-1)}{2}$$

である。また、数列 $\{b_n\}$ は、公比 $1 + c\sqrt{2d}$ の等比数列なので、その一般項は、

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 (1 + c\sqrt{2d})^{n-1} \\ &= b (1 + c\sqrt{2d})^{n-1} \quad (\because b_1 = b) \end{aligned}$$

である。また、初項から第 n 項までの和は、

$$\sum_{k=1}^n b(1 + c\sqrt{2d})^{k-1} = b \frac{1 - (1 + c\sqrt{2d})^n}{1 - (1 + c\sqrt{2d})} = b \frac{(1 + c\sqrt{2d})^n - 1}{c\sqrt{2d}}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \text{一般項} \quad a_n = a + \sqrt{2d}(n-1) \quad \text{和} \quad an + \sqrt{2d} \frac{n(n-1)}{2}$$

$$b_n = b(1 + c\sqrt{2d})^{n-1} \quad b \frac{(1 + c\sqrt{2d})^n - 1}{c\sqrt{2d}}$$

問 3

$d > 0$ であるから、任意の n について $h_n > 0$ であるためには、任意の n について、

$$g_n > 0$$

が成り立たなくてはならない。よって、任意の n について、

$$cb_n > 0$$

である。これが成立するには、 c と b_n が常に同符号かつ 0 以外でなくてはならないが、

$$b_n = b(1+c)^{n-1}$$

より、 $1+c < 0$ のとき b_n の符号は一定とならず、 $cb_n < 0$ となる n が存在することになる。

よって、

$$\begin{aligned} 1+c &> 0 \\ \Leftrightarrow c &> -1 \end{aligned}$$

でなければならず、 $c \neq 0$ のとき、 b と c の符号を一致させれば任意の n について $h_n > 0$ となる。

よって、求める c の値の範囲は、

$$c > -1, c \neq 0$$

である。

$$(\text{答}) \quad c > -1, c \neq 0$$

問 4

$d = \frac{1}{2}$ のとき、 $a_{n+1} - a_n = 1$ なので、

$$\begin{aligned} h_n &= \frac{1}{2} (a_{n+1} - a_n) (b_{n+1} - b_n) \\ &= \frac{1}{2} (b_{n+1} - b_n) \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned} 4h_2 - 6h_1 - 1 &= 4 \cdot \frac{1}{2} (b_3 - b_2) - 6 \cdot \frac{1}{2} (b_2 - b_1) - 1 \\ &= 2b_3 - 5b_2 + 3b_1 - 1 = 0 \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $b = 1$ より、

$$b_n = (1+c)^{n-1}$$

であるから、③より、

$$\begin{aligned} 2(1+c)^2 - 5(1+c) + 3 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2c^2 - c - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2c+1)(c-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow c &= -\frac{1}{2}, 1 \end{aligned}$$

となる。 $c > -1$ のもとでは

$$\begin{aligned} cb_n &> 0 \\ \Leftrightarrow c &> 0 \end{aligned}$$

であるから、 $c = 1$ である。

$$(\text{答}) \quad c = 1$$

問 5

$b = 1, c = \frac{2}{3}, d = \frac{1}{2}$ のとき、

$$a_n = a + n - 1, \quad b_n = \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$$

である。よって、点 P_1, P_2, P_3 の座標はそれぞれ、

$$P_1(a, 1), \quad P_2\left(a+1, \frac{5}{3}\right), \quad P_3\left(a+2, \frac{25}{9}\right)$$

である。 $\tan \alpha, \tan \theta$ はそれぞれ、直線 $P_1 P_2, P_1 P_3$ の傾きなので、

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{\frac{5}{3} - 1}{(a+1) - a} = \frac{2}{3} \\ \tan \theta &= \frac{\frac{25}{9} - 1}{(a+2) - a} = \frac{8}{9} \end{aligned}$$

また、 $\beta = \theta - \alpha$ であるので、

$$\begin{aligned} \tan \beta &= \tan(\theta - \alpha) \\ &= \frac{\tan \theta - \tan \alpha}{1 + \tan \theta \tan \alpha} \\ &= \frac{\frac{8}{9} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{8}{9} \cdot \frac{2}{3}} \\ &= \frac{6}{43} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \tan \alpha = \frac{2}{3}, \quad \tan \beta = \frac{6}{43}, \quad \tan \theta = \frac{8}{9}$$

問題 2

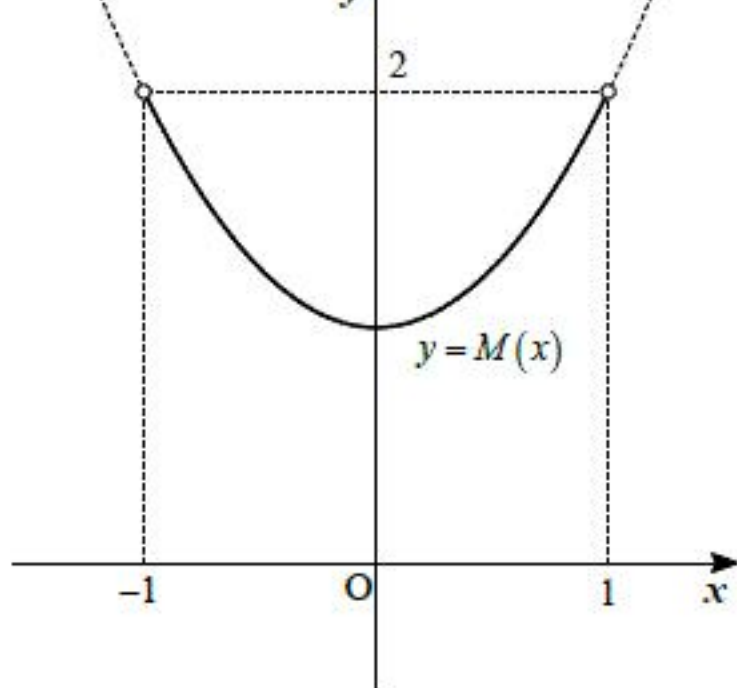
問 1

$$\begin{aligned} f(t) &= \sin^2 t + 2x \cos t \\ &= 1 - \cos^2 t + 2x \cos t \quad (\because \sin^2 t = 1 - \cos^2 t) \\ &= -(\cos t - x)^2 + x^2 + 1 \end{aligned}$$

より、 $-1 < x < 1$ のとき、 $\cos t = x$ となる実数 t が存在し、そのとき $f(t)$ は最大値、

$$M(x) = x^2 + 1$$

をとる。よって、 $-1 < x < 1$ の範囲で $y = M(x)$ を図示すると次図のようになる。



(答) 前図

問 2

$$f(t) = -(\cos t - x)^2 + x^2 + 1$$

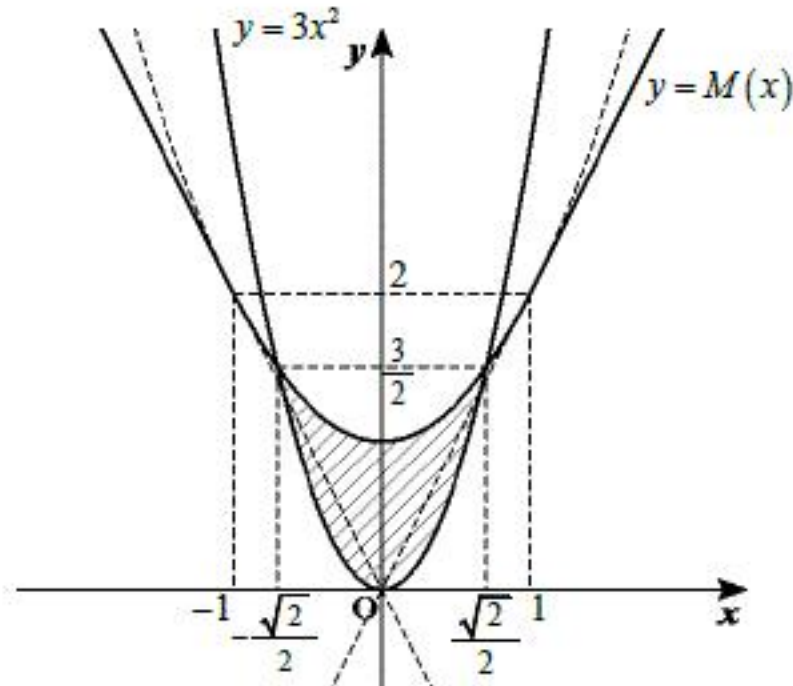
より、 $x \geq 1$ のとき、 $\cos t = 1$ なる実数 t で $f(t)$ は最大値をとり、

$$M(x) = -(1-x)^2 + x^2 + 1 = 2x$$

である。 $x \leq -1$ のとき、 $\cos t = -1$ なる実数 t で $f(t)$ は最大値をとり、

$$M(x) = -(-1-x)^2 + x^2 + 1 = -2x$$

となる。よって、グラフの概形は次図のようになる。ただし、斜線部は面積を求める部分である。



これより、求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \{(x^2 + 1) - 3x^2\} dx &= 2 \left[-\frac{2}{3}x^3 + x \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

(答) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

問 3

$G'(x) = 6x$ より、接線 L_1 の方程式は、

$$y = 6a(x-a) + 3a^2 = 6ax - 3a^2$$

と表される。同様に、接線 L_2 の方程式は、

$$y = 6bx - 3b^2$$

と表される。これら接線の交点が点 Q であるから、その x 座標は、

$$6ax - 3a^2 = 6bx - 3b^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(a+b)$$

である。これより、 y 座標は $y = 6ax - 3a^2 = 3ab$ である。よって、

$$\text{点 } Q \left(\frac{a+b}{2}, 3ab \right)$$

である。

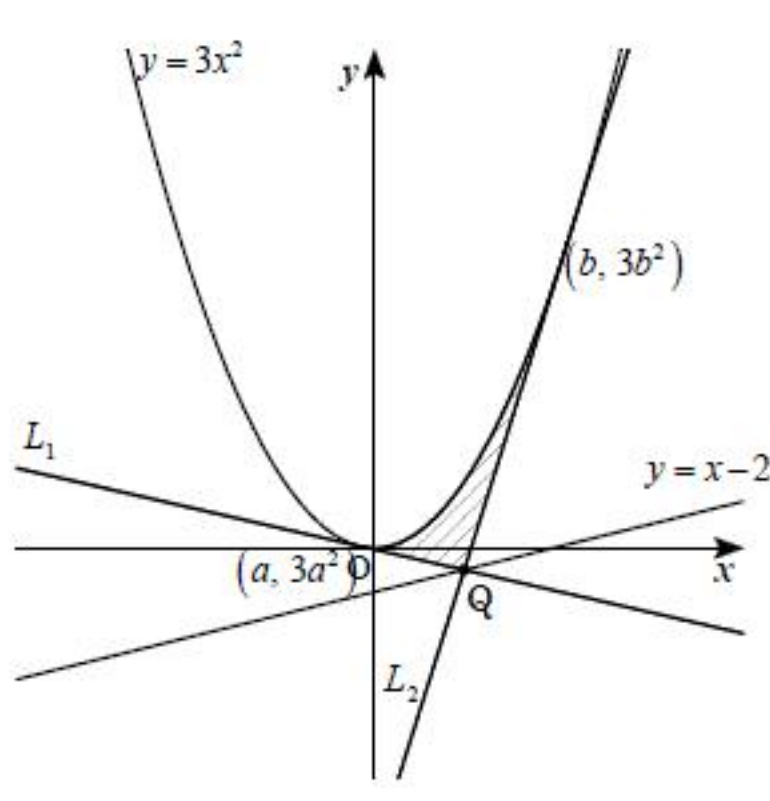
(答) 点 $Q \left(\frac{a+b}{2}, 3ab \right)$

※点 Q の y 座標は、点 Q が $y = x - 2$ 上にあることから、 $y = \frac{a+b-4}{2}$ などとしても良い。

問 4

$a < b$ としても一般性を失わない。このとき、グラフを図示すると次図のようになる。

ただし、斜線部は面積を求める部分である。



よって、2本の接線 L_1, L_2 と曲線 $y = G(x)$ で囲まれる図形の面積 (S とする) は、

$$\begin{aligned} S &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \{3x^2 - (6ax - 3a^2)\} dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \{3x^2 - (6bx - 3b^2)\} dx \\ &= \int_a^b 3x^2 dx + \int_a^{\frac{a+b}{2}} (-6ax + 3a^2) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (-6bx + 3b^2) dx \\ &= \left[x^3 \right]_a^b + \left[-3ax^2 + 3a^2x \right]_a^{\frac{a+b}{2}} + \left[-3bx^2 + 3b^2x \right]_{\frac{a+b}{2}}^b \\ &= \frac{1}{4}(b-a)^3 \end{aligned}$$

ここで、曲線 $y = G(x)$ 上の点 $(t, 3t^2)$ を考える。この点における接線の方程式は、

$$y = 6tx - 3t^2$$

である。点 Q の座標を $(q, q-2)$ とおくと、この接線が点 Q を通るとき、

$$\begin{aligned} q-2 &= 6qt - 3t^2 \\ \Leftrightarrow 3t^2 - 6qt + q-2 &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

であるが、この2次方程式は $t = a, b$ を解に持つので、解と係数の関係より、

$$\begin{aligned} a+b &= 2q \\ ab &= \frac{q-2}{3} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

が成り立つ。また、①の判別式を D とする。 a, b は実数ゆえ、 $D > 0$ が成り立つが、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (-3q)^2 - 3(q-2) \\ &= 9\left(q - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{23}{4} > 0 \end{aligned}$$

であるので、 q は全ての実数値をとりうる。また、②と $b > a$ とから、

$$\begin{aligned} b-a &= \sqrt{(a+b)^2 - 4ab} \\ &= 2\sqrt{q^2 - \frac{1}{3}q + \frac{2}{3}} \\ &= 2\sqrt{\left(q - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{23}{36}} \end{aligned}$$

である。よって $b-a$ は $q = \frac{1}{6}$ のとき、最小値 $2\sqrt{\frac{23}{36}} = \frac{\sqrt{23}}{3}$ をとる。

したがって、 $b-a$ が最小のとき、 $(b-a)^3$ も最小となるので、

$$S \geq \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{23}}{3} \right)^3 = \frac{23\sqrt{23}}{108}$$

である。

(答) $\frac{23\sqrt{23}}{108}$

〔別解〕

(S を a, b で表したところから)

ここで、点 Q の y 座標は $3ab$ と $\frac{a+b-4}{2}$ の2通りで表されるので、

$$3ab = \frac{a+b-4}{2} \quad \dots \textcircled{3}$$

である。 $b-a = k$ おき、これと③から b を消去し整理すると、

$$6a^2 + 2(3k-1)a - k + 4 = 0$$

となる。これを満たす実数 a が存在しなければならないので、この2次方程式の判別式を D_1 とすると、

$$\frac{D_1}{4} = (3k-1)^2 + 6k - 24 = 9k^2 - 23 \geq 0$$

よって、 $k = b-a > 0$ も考慮すると、

$$k \geq \frac{\sqrt{23}}{3}$$

である。したがって、

$$S = \frac{1}{4}k^3 \geq \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{23}}{3} \right)^3 = \frac{23\sqrt{23}}{108}$$

である。

(答) $\frac{23\sqrt{23}}{108}$