

問題 1

問 1 (1)

数列 $\{a_n\}$ は初項 a 、公差 d の等差数列であるから、その一般項 a_n は、

$$a_n = a + d(n-1) \quad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。特に、 $d = 2a$ のときには $a = \frac{d}{2}$ であるから、これを①式に代入して a を消去することにより、

$$a_n = \frac{d}{2} + d(n-1) = d\left(n - \frac{1}{2}\right) \quad \dots \textcircled{2}$$

と表すことができる。また、この式に等差数列の総和の公式を適用すると、

$$S_a = \sum_{k=1}^n a_k = d\left(\frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}n\right) = \frac{d}{2}n^2 = an^2 \quad \dots \textcircled{3}$$

が求まる。

$$\begin{aligned} \text{(答)} \quad a_n &= d\left(n - \frac{1}{2}\right) \\ S_a &= an^2 \end{aligned}$$

(2)

不等式 $6a_n < a_{n+1} + 27d$ に②式の結果を代入すると、

$$6d\left(n - \frac{1}{2}\right) < d\left\{(n+1) - \frac{1}{2}\right\} + 27d \Leftrightarrow d\left(n - \frac{61}{10}\right) < 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

のように変形できる。同様に不等式 $2a_n > a_{n+1}$ に②式を代入すると、

$$2d\left(n - \frac{1}{2}\right) > d\left\{(n+1) - \frac{1}{2}\right\} \Leftrightarrow d\left(n - \frac{3}{2}\right) > 0 \quad \dots \textcircled{5}$$

と同値変形できる。条件より $d \neq 0$ なので、以下 d の正負によって場合分けする。

[1] $d > 0$ のとき

$$\textcircled{4} \text{かつ} \textcircled{5} \Leftrightarrow \frac{3}{2} < n < \frac{61}{10} \text{ であるから、これを満たす整数 } n \text{ は、} n = 2, 3, 4, 5, 6 \text{ である。}$$

[2] $d < 0$ のとき

$$\textcircled{4} \text{かつ} \textcircled{5} \Leftrightarrow n < \frac{3}{2} \text{ かつ } n > \frac{61}{10} \text{ であるから、これを満たす整数 } n \text{ は存在しない。}$$

以上[1], [2]より、 $d > 0$ のとき、 $n = 2, 3, 4, 5, 6$ 、 $d < 0$ のとき、題意を満たす n は存在しない。

$$\begin{aligned} \text{(答)} \quad d > 0 \text{ のとき、} \quad n &= 2, 3, 4, 5, 6 \\ d < 0 \text{ のとき、題意を満たす } n &\text{ は存在しない} \end{aligned}$$

問 2

(1)

$\{b_n\}$ は初項 b 、公比 r の等比数列であるから、その一般項 b_n は、

$$b_n = br^{n-1} \quad \dots \textcircled{6}$$

と表せる。特に、 $r = 2b + 1$ のとき、これを⑥式に代入して r を消去すると、

$$b_n = b(2b + 1)^{n-1}$$

となる。さらに、等比数列の総和の公式を用いて S_b を求めると、 $b = \frac{r-1}{2}$ であることから、

$$S_b = \sum_{k=1}^n b_k = b \frac{r^n - 1}{r - 1} = \frac{r-1}{2} \frac{r^n - 1}{r - 1} = \frac{r^n - 1}{2} \quad \dots \textcircled{7}$$

が求まる。

$$\text{(答)} \quad b_n = b(2b + 1)^{n-1}$$

$$S_b = \frac{r^n - 1}{2}$$

(2)

与えられた不等式は、

$$\log_2 b_n > \log_2 b_{n+1} + \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \log_2 \sqrt{2} b_{n+1}$$

と、書き換えることができる。対数の底 2 は 1 よりも大きいことから $\log_2 x$ は増加関数なので、真数条件と合わせて、

$$b_n > \sqrt{2} b_{n+1} > 0$$

と同値であることがわかる。ここで、

$$\begin{aligned} b_n &> \sqrt{2} b_{n+1} > 0 \\ \Leftrightarrow b_n &> 0, b_{n+1} > 0 \\ \Leftrightarrow b &> 0, r > 0 \\ \Leftrightarrow \frac{r-1}{2} &> 0, r > 0 \\ \Leftrightarrow r &> 1 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{8}$$

である。また、

$$\begin{aligned} b_n &> \sqrt{2} b_{n+1} > 0 \\ \Leftrightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} &< \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow r &< \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{9}$$

よって、⑧、⑨より、題意を満たす r は存在しない。

$$\text{(答)} \quad \text{題意を満たす } r \text{ は存在しない}$$

問 3

(1)

行列 B の成分を計算によって求めると、

$$B = A^2 = \begin{pmatrix} d & 2d-1 \\ 1 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & 2d-1 \\ 1 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^2+2d-1 & 4d^2-2d \\ 2d & d^2+2d-1 \end{pmatrix}$$

である。求める g は B の $(1, 1)$ 成分だから、 $g = d^2 + 2d - 1$ である。

次に、 g の最小値を求めるために平方完成すると、

$$\begin{aligned} g &= d^2 + 2d - 1 \\ &= (d+1)^2 - 2 \end{aligned}$$

となることから、 $d = -1$ のとき g は最小値 -2 をとる。

$$\begin{aligned} \text{(答)} \quad g &= d^2 + 2d - 1 \\ g \text{ が最小値をとるとき、} \quad d &= -1 \end{aligned}$$

(2)

(1)より、 g が最小値をとるとき $d = -1$ であるから、 $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ である。このとき A の行列式は、

$$\det A = (-1)(-1) - (-3) \cdot 1 = 4 \neq 0$$

であるから、逆行列 A^{-1} が存在し、 $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ となる。ここで、 $A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix}$ の両辺に左から A^{-1} をかけると、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と求まる。

また、 $r \neq 1, r > 0, n = 3$ および $S_a = 2S_b$ であるとき、

$$S_a = 3 + 2 + 1 = 6$$

である。 S_b を二通りの方法で表すと、

$$S_b = \frac{1}{2} S_a = 3$$

$$S_b = \sum_{k=1}^n b_k = 2 + 2r + 2r^2$$

より、

$$2 + 2r + 2r^2 = 3 \Leftrightarrow 2r^2 + 2r - 1 = 0$$

となる。よって、 $r > 0$ であることも考慮してこの 2 次方程式を解くと、

$$r = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, a = 3, b = 2, S_a = 6, r = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

問題 2

問 1

円と放物線の式

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$y = -\frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})x^2 + 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

の2式から x^2 を消去して、共有点の y 座標を求める。①より $x^2 = 4 - y^2$ なので、これを②に代入して、

$$y = -\frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})(4 - y^2) + 2$$

$$\Leftrightarrow y^2 - (2 - \sqrt{2})y - 2\sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (y + \sqrt{2})(y - 2) = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\therefore y = -\sqrt{2}, 2$$

となる。

①かつ② $\Leftrightarrow$ ①かつ③ なので、 $y = -\sqrt{2}, 2$ を①に代入することで交点の x 座標がすべて求まる。まず $y = -\sqrt{2}$ を代入すると、

$$x^2 = 4 - (-\sqrt{2})^2 = 2$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{2}$$

となる。

次に、 $y = 2$ を代入すると、

$$x^2 = 4 - 2^2 = 0$$

$$\therefore x = 0$$

のようになる。

以上より、円と放物線の共有点は3つ存在し、その座標は $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (0, 2)$

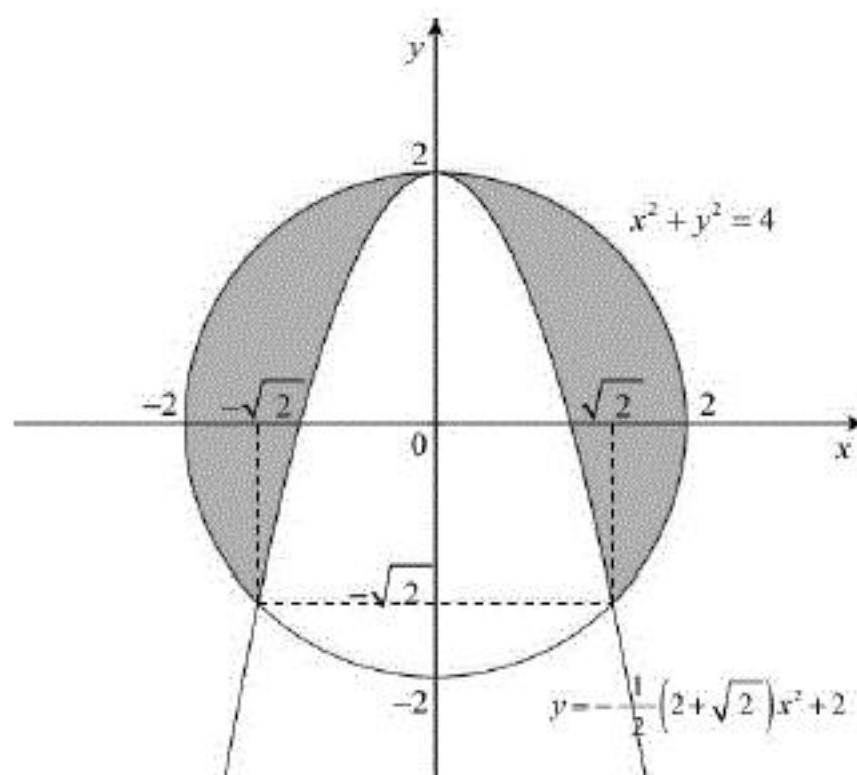
である。

(答) $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (0, 2)$ の3つ

問 2

不等式 $x^2 + y^2 \leq 4$ は円 $x^2 + y^2 = 4$ の内部を表し、不等式 $(2 + \sqrt{2})x^2 + 2y \geq 4$ は放物線

$y = -\frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})x^2 + 2$ 上側の領域を表しているから、求める領域 R は下図の網掛け部のようになる。



次に、領域 R の面積 S を求める。 y 軸に関して対称なので、中心角 $\frac{3}{4}\pi$ 、半径2の扇形から余分な部分を除くことを考えると、領域の $x > 0$ 部分の面積は、

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \pi \cdot 2^2 \cdot \frac{3}{8} - \int_0^{\sqrt{2}} \left\{ -\frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})x^2 + 2 - (-x) \right\} dx \\ &= \frac{3}{2}\pi - \left[-\frac{1}{6}(2 + \sqrt{2})x^3 + 2x + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{3}{2}\pi - \frac{4\sqrt{2} + 1}{3} \end{aligned}$$

となる。

よって、求める面積 S は、 $3\pi - \frac{8\sqrt{2} + 2}{3}$ である。

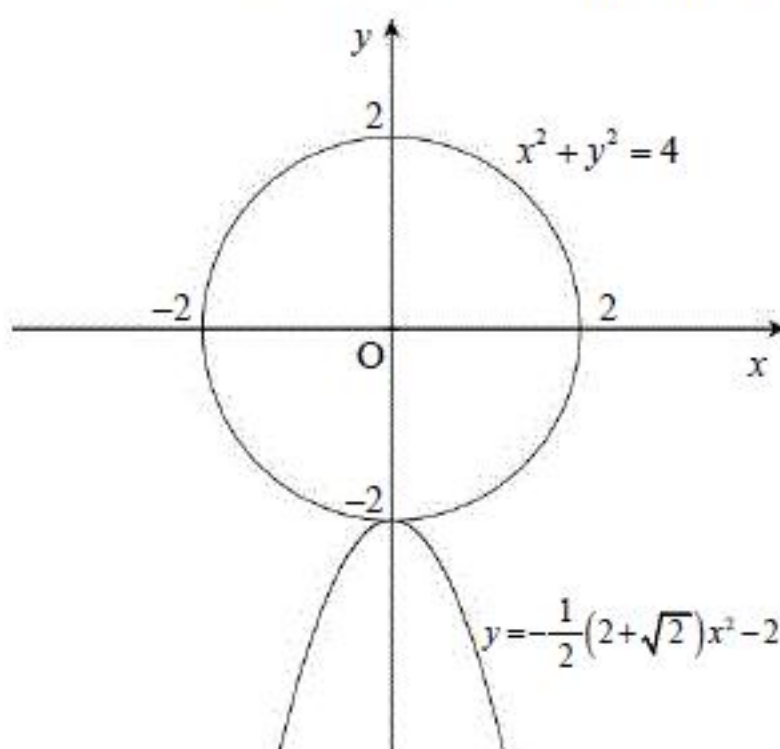
(答) 上図の網掛け部、面積: $3\pi - \frac{8\sqrt{2} + 2}{3}$

問 3

$(2 + \sqrt{2})x^2 + 2y$ が k という値をとりうる条件は、放物線

$$k = (2 + \sqrt{2})x^2 + 2y \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})x^2 + \frac{k}{2} \quad \dots \textcircled{4}$$

が領域 $x^2 + y^2 \leq 4$ と共有点をもつことである。放物線④の y 切片は $\frac{k}{2}$ なので、 k が最小値をとるのは、下図のように、④の頂点が円 $x^2 + y^2 = 4$ と点 $(0, -2)$ において接するときである。

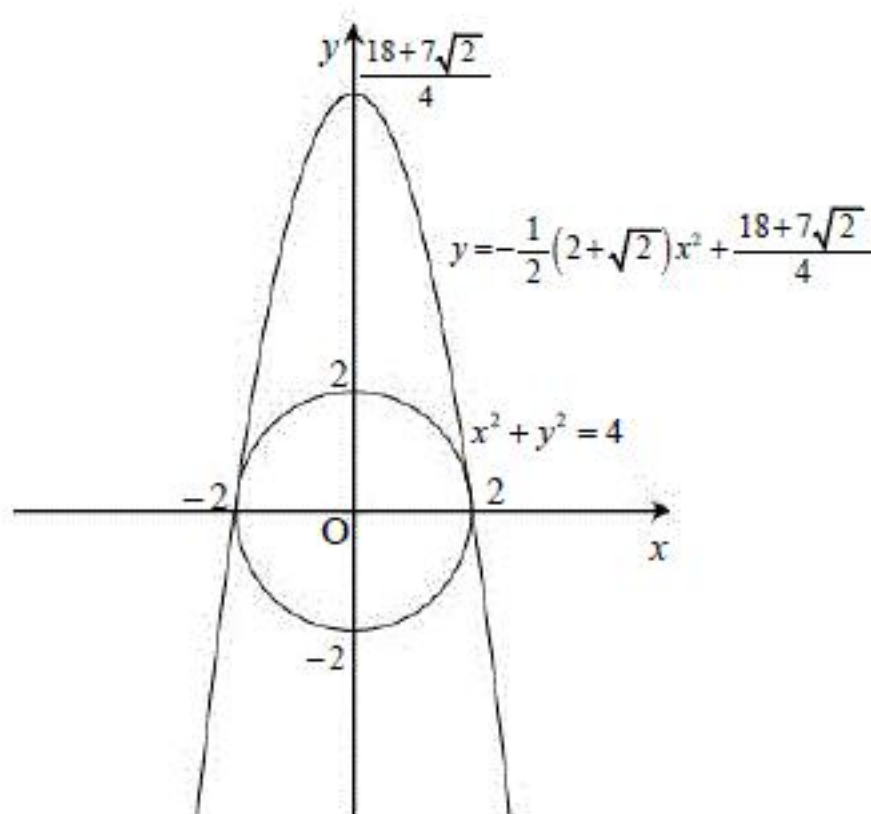


よってこのとき放物線の y 切片は、

$$\frac{k}{2} = -2$$

であるので、 $(2 + \sqrt{2})x^2 + 2y$ の最小値は、 $k = -4$ となる。

k が最大値をとるのは、放物線④が円 $x^2 + y^2 = 4$ と下図のように接するときである。



式①と④から x^2 を消去して y の2次方程式をつくると、

$$y = -\frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})(4 - y^2) + \frac{k}{2}$$

$$\Leftrightarrow (2 + \sqrt{2})y^2 - 2y + k - 4(2 + \sqrt{2}) = 0$$

のようになるが、図のように放物線と円が接するのはこの2次方程式が重解を持つときであるから、判別式を D とすると、

$$\frac{D}{4} = 1 - (2 + \sqrt{2}) \left\{ k - 4(2 + \sqrt{2}) \right\} = 0$$

$$\therefore k = 9 + \frac{7}{2}\sqrt{2}$$

と求まる。

以上より、 $(2 + \sqrt{2})x^2 + 2y$ の最大値は $9 + \frac{7}{2}\sqrt{2}$ 、最小値は -4 である。

(答) 最大値: $9 + \frac{7}{2}\sqrt{2}$ 、最小値: -4