

問題 1

問 1(1)

$\sin \theta + \cos \theta = 1$ より,

$$\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta \right) = 1$$
$$\therefore \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\because \text{加法定理の逆})$$

であるからこれを満たす θ は,

$$\theta = 0 + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

である。よって $\sin \theta, \cos \theta$ の値は,

$$(\sin \theta, \cos \theta) = (1, 0), (0, 1)$$

である。

(答) $(\sin \theta, \cos \theta) = (1, 0), (0, 1)$

(2)

$$\begin{aligned} c &= \sin 2\theta - 2\cos \theta \\ &= 2\sin \theta \cos \theta - 2\cos \theta \\ &= 2\cos \theta (\sin \theta - 1) \end{aligned}$$

と変形できる。場合分けすると,

[1] $\begin{cases} \sin \theta = 1 \\ \cos \theta = 0 \end{cases}$ のとき, $c = 0$ となる。

[2] $\begin{cases} \sin \theta = 0 \\ \cos \theta = 1 \end{cases}$ のとき, $c = -2$ となる。

以上, [1], [2] より, $c = 0, -2$ である。

(答) $c = 0, -2$

(3)

確率分布表を書くと,

c	確率
0	$\frac{2}{3}$
-2	$\frac{1}{3}$

であるから, c の平均は,

$$0 \times \frac{2}{3} + (-2) \times \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

である。分散は,

$$\left(0 - \left(-\frac{2}{3} \right) \right)^2 \times \frac{2}{3} + \left(-2 - \left(-\frac{2}{3} \right) \right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{9}$$

と求まる。

(答) 表は前表参照

平均: $-\frac{2}{3}$

分散: $\frac{8}{9}$

問 2(1)

$c = 2\cos \theta (\sin \theta - 1)$ であるから, $\sin \theta = \frac{1}{2}$ より,

$$c = -\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

であるので,

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。よって, $0 \leq \theta \leq \pi$ から $\theta = \frac{\pi}{6}$ であり, このとき $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ である。

(答) $\theta = \frac{\pi}{6}, \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(2)

とりうる θ の値は,

$$\theta = \frac{1}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi, \frac{25}{6}\pi, \frac{37}{6}\pi, \frac{49}{6}\pi$$

であるから, これらすべてを合計すれば $\frac{125}{6}\pi$ になる。

(答) $\frac{125}{6}\pi$

問 3(1)

真数条件より, $x > 3$ である。

②式を整理すると,

$$\begin{aligned} \log_y (x-3)(x+1) &= 1 \\ \therefore f(x) &= y = x^2 - 2x - 3 \quad (y \neq 1 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

となる。また $y \neq 1$ より, $x \neq 1 + \sqrt{5}$ である。

(答) $f(x) = x^2 - 2x - 3 \quad (x > 3, x \neq 1 + \sqrt{5})$

(2)

$y = a$ を $y = x^2 - 2x - 3$ に代入すると,

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - (3+a) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 1 \pm \sqrt{1+(3+a)} \\ \Leftrightarrow x &= 1 \pm \sqrt{4+a} \end{aligned}$$

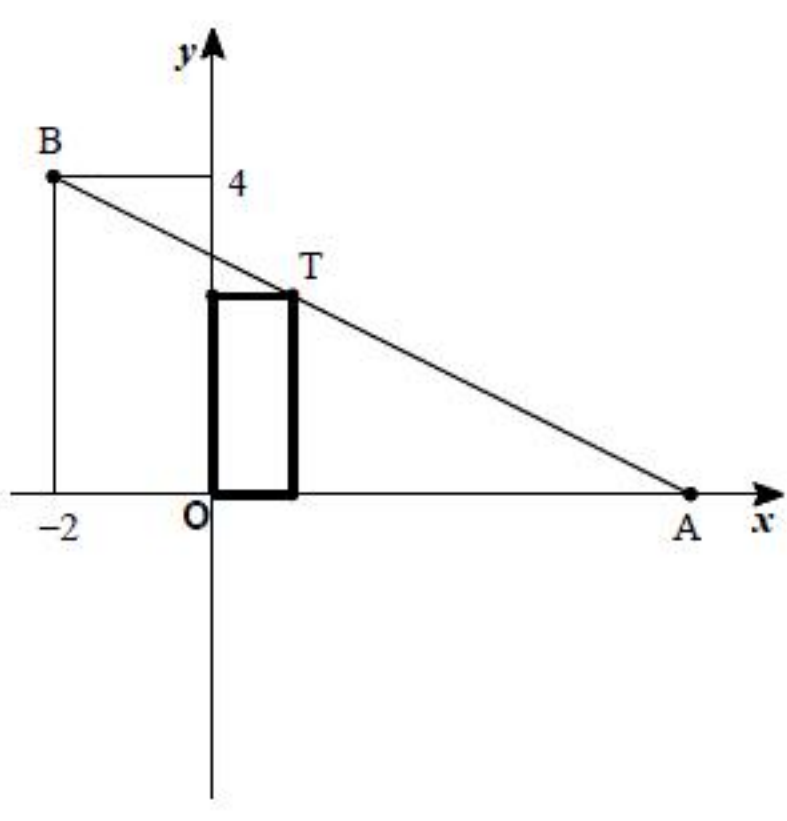
となる。ここで $x > 3$ であるから,

$$x = 1 + \sqrt{4+a}$$

と求まる。

(答) $x = 1 + \sqrt{4+a}$

問題 2



問 1

線分 AB の式は

$$y = -\frac{1}{2}x + 3 \quad (-2 \leq x \leq 6)$$

であるから、

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 \quad (-2 \leq x \leq 6)$$

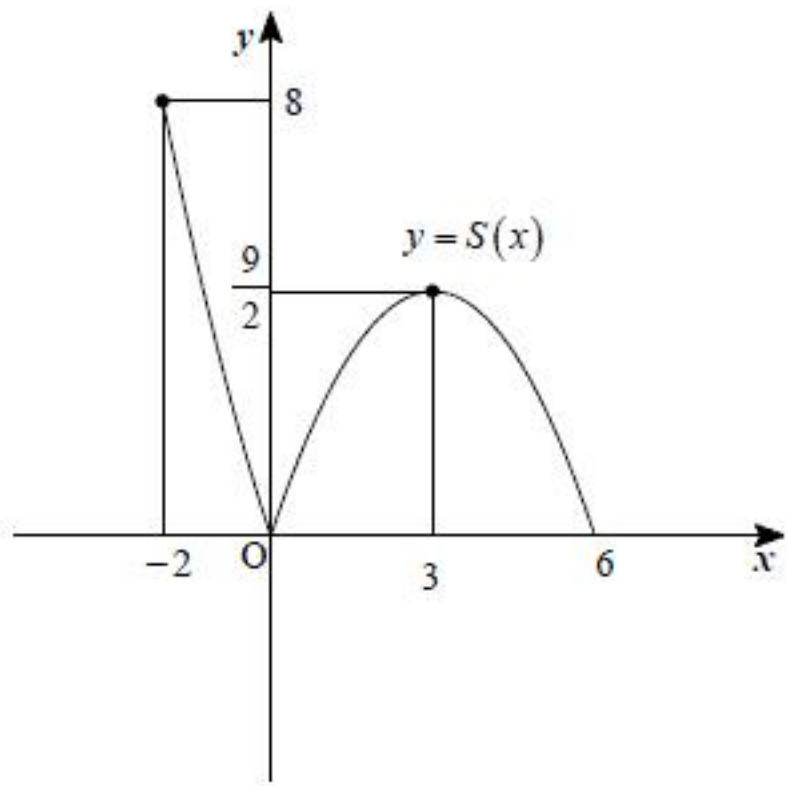
となる。また $0 \leq x \leq 6$ での $S(x)$ は、

$$\begin{aligned} S(x) &= x \cdot f(x) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 3x \end{aligned}$$

であり、 $-2 \leq x \leq 0$ での $S(x)$ は、

$$\begin{aligned} S(x) &= (-x) \cdot f(x) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - 3x \end{aligned}$$

である。これを図示すると、



となる。

(答) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 \quad (-2 \leq x \leq 6)$

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 3x & (-2 \leq x \leq 0 \text{ のとき}) \\ -\frac{1}{2}x^2 + 3x & (0 \leq x \leq 6 \text{ のとき}) \end{cases}$$

図は上図参照

問 2

積分して面積を求めると、

$$\begin{aligned} &\int_{-2}^0 \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x \right) dx + \int_0^6 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-2}^0 + \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^6 \\ &= -\left(-\frac{4}{3} \right) + 6 - 36 + 54 \\ &= \frac{76}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{76}{3}$

問 3

$-2 \leq x \leq 6$ において、 $S(x) \leq S(x+2)$ となる最小の x を求める。このような x が $-2 \leq x \leq 0$ の範囲にあるとすると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 - 3x &= -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 3(x+2) \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \pm 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

と求められる。このうち $-2 \leq x \leq 0$ を満たすのは $x = 2 - 2\sqrt{2}$ である。

また、 $S(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$ を平方完成すると、

$$S(x) = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{9}{2}$$

となるので、このグラフの軸は $x = 3$ である。

これと問 1 のグラフより場合分けすると、

[1] $-2 \leq x \leq 2 - 2\sqrt{2}$ のとき

$$\begin{aligned} M(x) &= S(x) \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 3x \end{aligned}$$

である。

[2] $2 - 2\sqrt{2} \leq x \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned} M(x) &= S(x+2) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + x + 4 \end{aligned}$$

である。

[3] $1 \leq x \leq 3$ のとき

$$\begin{aligned} M(x) &= S(3) \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

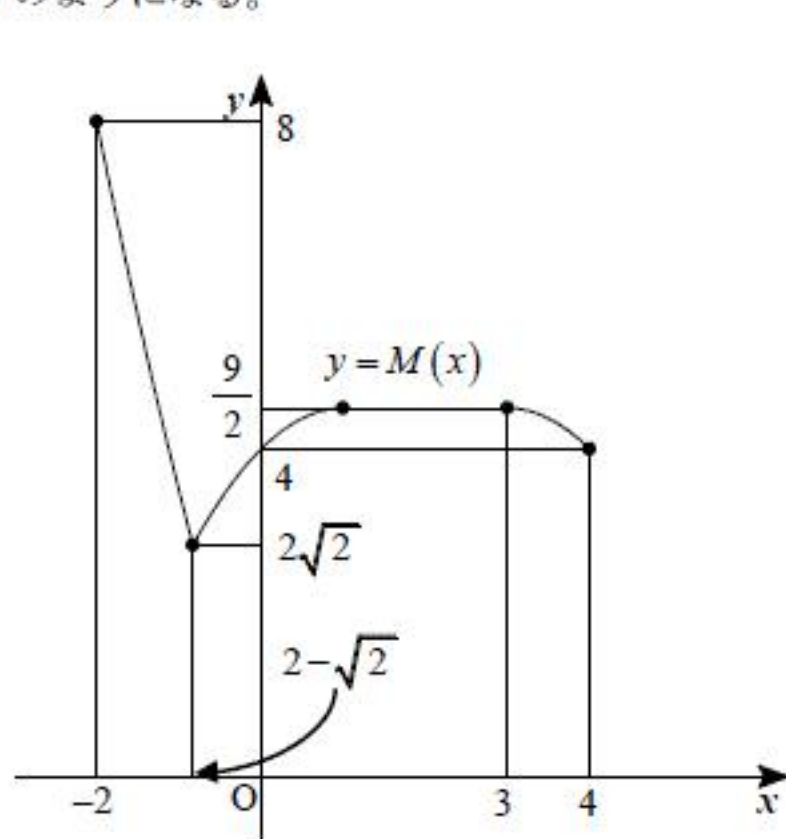
である。

[4] $3 \leq x \leq 4$ のとき

$$\begin{aligned} M(x) &= S(x) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 3x \end{aligned}$$

である。

これを図示すると以下のようになる。



(答)

$$M(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 3x & (-2 \leq x \leq 2 - 2\sqrt{2} \text{ のとき}) \\ -\frac{1}{2}x^2 + x + 4 & (2 - 2\sqrt{2} \leq x \leq 1 \text{ のとき}) \\ \frac{9}{2} & (1 \leq x \leq 3 \text{ のとき}) \\ -\frac{1}{2}x^2 + 3x & (3 \leq x \leq 4 \text{ のとき}) \end{cases}$$

上図参照