

問題 1

問 1

(1)

$a=1, d=2$ より

$$\begin{aligned} a_n &= 1+(n-1) \cdot 2 \\ &= 2n-1 \end{aligned}$$

である。 よって

$$\begin{aligned} S_n(n) &= \sum_{k=1}^n (2k-1) \\ &= 2 \cdot \frac{n}{2} (n+1) - n \\ &= n^2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $a_n=2n-1, S_n(n)=n^2$

(2)

(1)より

$$\begin{aligned} S_n(1000) &= 10^6 \\ \therefore \log_{10} \{S_n(1000)\} &= 6 \end{aligned}$$

となる。

(答) 6

(3)

求めるのは $10 < n^2 < 50$ を満たす n であるから

$$n=4, 5, 6, 7$$

である。

(答) $n=4, 5, 6, 7$

問 2

(1)

$a_n=a+(n-1)d$ より $b_n=2^{a+(n-1)d}$ なので

$$\frac{b_n}{b_m}=2^{(n-m)d}$$

となることを利用すると

$$\begin{aligned} \frac{b_7}{b_3} &= 2^{4d} \\ &= 16^d \\ &= \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{4}} \\ &= 16^{\frac{1}{5}} \\ \therefore d &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

となる。 よって

$$\begin{aligned} b_3 &= 2^{a+\frac{2}{5}} \\ &= \sqrt[5]{4} \\ \therefore a &= 0 \end{aligned}$$

となる。

(答) $a=0, d=\frac{1}{5}$

(2)

(1)より

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= 2^d \\ &= 2^{\frac{1}{5}} \\ &= \sqrt[5]{2} \end{aligned}$$

である。

(答) $\sqrt[5]{2}$

(3)

$b_n=2^{a+(n-1)d}$ なので(1)より

$$\begin{aligned} b_n &= 2^{\frac{n-1}{5}} \\ &= \sqrt[5]{2^{n-1}} \end{aligned}$$

である。 よって

$$\begin{aligned} S_b(n) &= \sum_{k=1}^n 2^{\frac{k-1}{5}} \\ &= \frac{2^{\frac{n}{5}}-1}{2^{\frac{1}{5}}-1} \\ &= \frac{\sqrt[5]{2^n}-1}{\sqrt[5]{2}-1} \end{aligned}$$

となる。

(答) $b_n=\sqrt[5]{2^{n-1}}, S_b(n)=\frac{\sqrt[5]{2^n}-1}{\sqrt[5]{2}-1}$

(4)

$b_n=2$ のとき, (3)より

$$\begin{aligned} n-1 &= 5 \\ \therefore n &= 6 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} S_b(n) &= S_b(6) \\ &= \frac{\sqrt[5]{64}-1}{\sqrt[5]{2}-1} \end{aligned}$$

となる。

(答) $n=6, S_b(n)=\frac{\sqrt[5]{64}-1}{\sqrt[5]{2}-1}$

問 3

(1)

$a_{2m-1}=a+(2m-2)\pi$ より

$$\begin{aligned} u &= \sin \{a+(2m-2)\pi\} + \cos \{a+(2m-2)\pi\} \\ &= \sin a + \cos a \\ &= \sqrt{2} \sin \left(a + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

である。したがって u が最大値をとるとき, $0 < a < 2\pi$ より

$$a = \frac{\pi}{4}$$

であり, このとき u は最大値 $\sqrt{2}$ をとる。

(答) $a=\frac{\pi}{4}$ のとき, u は最大値 $\sqrt{2}$ をとる

(2)

$a_{2m}=a+(2m-1)\pi$ より

$$\begin{aligned} v &= \sin \{a+(2m-1)\pi\} - \cos \{a+(2m-1)\pi\} \\ &= -\sin a + \cos a \\ &= \sqrt{2} \cos \left(a + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

である。したがって v が最大値をとるとき, $0 < a < 2\pi$ より

$$a = \frac{7}{4}\pi$$

であり, このとき v は最大値 $\sqrt{2}$ をとる。

(答) $a=\frac{7}{4}\pi$ のとき, v は最大値 $\sqrt{2}$ をとる

(3)

(1), (2)より

$$\begin{aligned} y &= uv \\ &= (\sin a + \cos a)(-\sin a + \cos a) \\ &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= \cos 2a \end{aligned}$$

である。したがって y が最大値をとるとき, $0 < a < 2\pi$ より

$$a = \pi$$

であり, このとき y は最大値1をとる。

(答) $a=\pi$ のとき, y は最大値1をとる

問題 2

問 1

$f(0)=0, f(2)=0, f(-2)=0$ より

$$\begin{cases} c=0 \\ 4+4a+2b+c=0 \\ -4+4a-2b+c=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-2 \\ c=0 \end{cases}$$

となる。

(答) $a=0, b=-2, c=0$

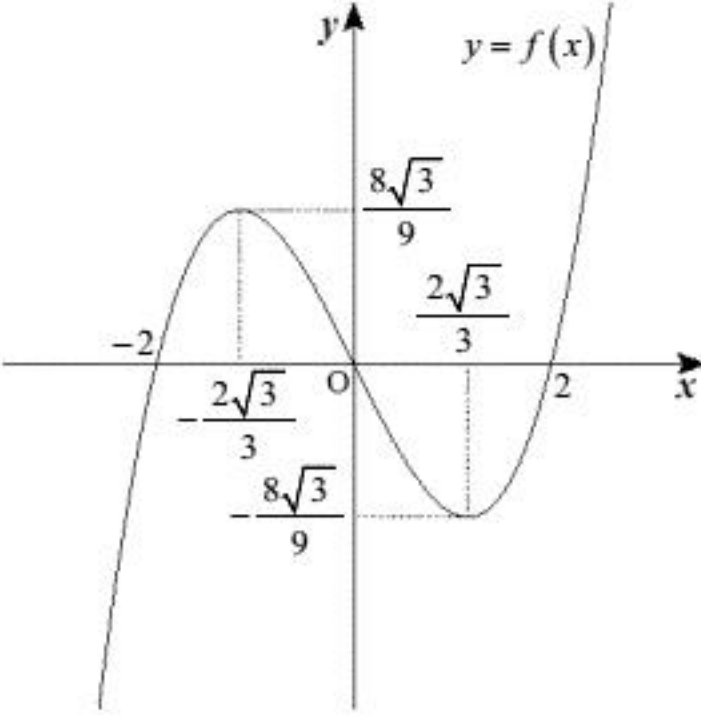
問 2

問 1 より

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-2x$$
$$f'(x)=\frac{3}{2}x^2-2$$
$$f''(x)=3x$$

である。 $f'(x)=0$ のとき $x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ であり、 $f''(x)=0$ のとき $x=0$ である。従って $y=f(x)$ の増減表とグラフの概形は

x	...	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	...	0	...	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+	+
$f(x)$		$\frac{8\sqrt{3}}{9}$		0		$-\frac{8\sqrt{3}}{9}$	



となる。

(答) 前表, 前図

問 3

曲線 $y=f(x)$ と円 $x^2+y^2=4$ の交点 (x, y) は

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^3-2x \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y=x(x^2-4) \\ y^2=4-x^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y=-xy^2 \\ y^2=4-x^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(xy+2)=0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たす。①において $y=0, y\neq 0$ で場合分けをする。

[1] $y=0$ のとき

①より $x^2=4$ なので、 $x=\pm 2$ である。

[2] $y\neq 0$ のとき

①より

$$\begin{cases} xy=-2 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=-2 \\ x^2+2xy+y^2=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=-2 \\ (x+y)^2=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=-2 \\ x=-y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{2} \\ y=\mp\sqrt{2} \end{cases} \text{(複合同順)}$$

となる。

以上より求める交点は、 $(-2, 0), (2, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ である。

(答) $(-2, 0), (2, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

問 4

問 2, 問 3 より曲線 $y=f(x)$ と円 $x^2+y^2=4$ は $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ で接する。また曲線

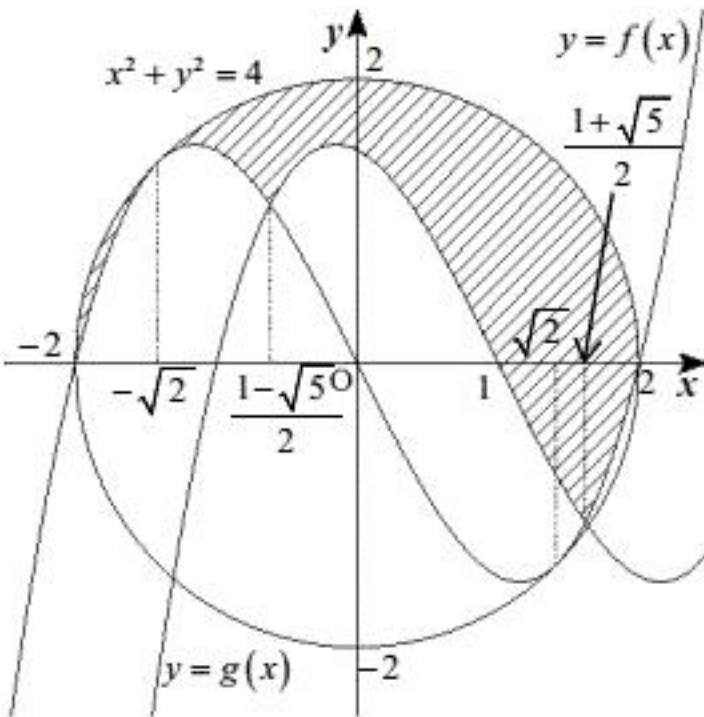
$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点の x 座標は

$$\frac{1}{2}x^3-2x=\frac{1}{2}(x-1)^3-2(x-1)$$
$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}=0$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

である。ここで

$$\sqrt{2}<1.5=\frac{1+2}{2}<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

である。さらに曲線 $y=g(x)$ と円 $x^2+y^2=4$ は、 $y>0$ の領域において明らかに交点を持たないことに注意して求める領域を図示すると



(答) 前図斜線部, 境界含む

のようになる。よって領域の面積は、上半円からの足し引きを考えて

$$2\pi-\int_{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} f(x)dx-\int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^1 g(x)dx+\int_1^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \{-g(x)\}dx+\int_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}^2 \{-f(x)\}dx$$
$$=2\pi-\int_{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} f(x)dx-\int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^2 f(x)dx-\int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} g(x)dx$$
$$=2\pi-\left[\frac{1}{8}x^4-x^2\right]_{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}-\left[\frac{1}{8}x^4-x^2\right]_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^2-\left[\frac{1}{8}(x-1)^4-(x-1)^2\right]_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$
$$=2\pi-\frac{5\sqrt{5}}{4}$$

となる。

(答) $2\pi-\frac{5\sqrt{5}}{4}$