

問題 1

問 1 (1)

数列 $\{a_n\}$ は初項 a 、公比 r の等比数列であるから、 $a_n = ar^{n-1}$ と表せる。いま、 $a_2 = 16$ より

$$ar = 16 \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

であり、また $b_3 = 2$ より

$$\begin{aligned} \log_2 ar^2 &= 2 \\ \therefore ar^2 &= 4 \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。②を①で辺々割ると、

$$r = \frac{1}{4}$$

が得られ、これを①に代入することで

$$a = 64$$

を得る。

$$\text{(答)} \quad r = \frac{1}{4}, a = 64$$

(2)

$$\begin{aligned} b_n &= \log_2 ar^{n-1} \\ &= \log_2 \left\{ 64 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \right\} \\ &= \log_2 \{ 2^6 \cdot 2^{-3(n-1)} \} \\ &= 6 - 2(n-1) \\ &= -2n + 8 \end{aligned}$$

であるから、

$$b_5 = -2 \cdot 5 + 8 = -2$$

である。また、数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = 6$ の等差数列であるから、初項から第 n 項までの和 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}(b_1 + b_n) \\ &= \frac{n}{2}(6 - 2n + 8) \\ &= n(-n + 7) \end{aligned}$$

で表される。よって

$$S_5 = 5 \cdot (-5 + 7) = 10$$

である。

$$\text{(答)} \quad b_5 = -2, S_5 = 10$$

(3)

(2)より、

$$\begin{aligned} S_n &\geq 10 \\ \Leftrightarrow -n^2 + 7n &\geq 10 \\ \Leftrightarrow n^2 - 7n + 10 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (n-2)(n-5) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 2 \leq n &\leq 5 \end{aligned}$$

であるから、題意を満たす n は

$$n = 2, 3, 4, 5$$

である。

$$\text{(答)} \quad n = 2, 3, 4, 5$$

問 2 (1)

$$a = 2^{32}, \frac{a}{r} = 2^{35} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} r &= a \cdot \frac{r}{a} \\ &= 2^{32} \cdot 2^{-35} \\ &= 2^{-3} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} a_{10} &= ar^9 \\ &= 2^{32} \cdot (2^{-3})^9 \\ &= 2^1 \\ &= 32 \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad r = \frac{1}{8}, a_{10} = 32$$

(2)

$$\begin{aligned} b_n &= \log_2 ar^{n-1} \\ &= \log_2 \left\{ 2^{32} \cdot \left(\frac{1}{8} \right)^{n-1} \right\} \\ &= \log_2 \{ 2^{32} \cdot 2^{-3(n-1)} \} \\ &= 32 - 3(n-1) \\ &= -3n + 35 \end{aligned}$$

より、 $n \leq 11$ のとき $b_n > 0$ 、 $n \geq 12$ のとき $b_n < 0$ である。よってその初項から第 n 項までの和 S_n について

$$S_1 < S_2 < \cdots < S_{10} < S_{11} > S_{12} > \cdots$$

が成り立ち、 S_n が最大になるのは

$$n = 11$$

のときである。またこのとき、

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{11}{2}(b_1 + b_{11}) \\ &= \frac{11}{2} \cdot (32 + 2) \\ &= 187 \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad n = 11, S_{11} = 187$$

(3)

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}(b_1 + b_n) \\ &= \frac{n}{2}(32 - 3n + 35) \\ &= \frac{n}{2}(-3n + 67) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} S_n &< 0 \\ \Leftrightarrow -3n + 67 &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{67}{3} &< n \end{aligned}$$

である。よってこれを満たす最小の自然数 n は、

$$n = 23$$

となる。

$$\text{(答)} \quad n = 23$$

問 3 (1)

$$\begin{aligned} b_2 &= \log_2 ar \\ &= \log_2 (x+2)(x+3) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} b_2 &= 1 + \log_2 (x+8) \\ \Leftrightarrow \log_2 (x+2)(x+3) &= \log_2 2 + \log_2 (x+8) \end{aligned}$$

である。 $x > -2$ のとき真数条件を満たすことに注意して、両辺の真数を比較すると

$$\begin{aligned} (x+2)(x+3) &= 2(x+8) \\ \Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+5)(x-2) &= 0 \\ \therefore x &= -5, 2 \end{aligned}$$

となる。ここで $x > -2$ であるから、求める解は

$$x = 2$$

である。

$$\text{(答)} \quad x = 2$$

(2)

三角関数の加法定理を利用すると、

$$\begin{aligned} b_2 &= \log_2 ar \\ &= \log_2 a + \log_2 r \\ &= (\cos^2 \beta + \sin \beta \cos \theta) + (\sin^2 \beta + \cos \beta \sin \theta) \\ &= (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) + (\sin \beta \cos \theta + \cos \beta \sin \theta) \\ &= 1 + \sin(\beta + \theta) \\ &= 1 + \sin \left(\frac{3\pi}{7} + \frac{\pi}{14} \right) \\ &= 1 + \sin \frac{\pi}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

が得られる。

$$\text{(答)} \quad b_2 = 2$$

(3)

三角関数の加法定理、倍角の公式を利用すると、

$$\begin{aligned} b_3 &= \log_2 ar^2 \\ &= \log_2 a + \log_2 r^2 \\ &= (\sin^2 \theta + \cos \beta \cos \theta) + \left(\frac{1}{2} \cos 2\theta - \sin \beta \sin \theta \right) \\ &= \left(\sin^2 \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) + (\cos \beta \cos \theta - \sin \beta \sin \theta) \\ &= \left\{ \sin^2 \theta + \frac{1}{2} (2 \cos^2 \theta - 1) \right\} + \cos(\beta + \theta) \\ &= \left(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) + \cos \left(\frac{3\pi}{7} + \frac{\pi}{14} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

が得られる。

$$\text{(答)} \quad b_3 = \frac{1}{2}$$

問題 2

問 1

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ について、

$$\begin{aligned} f'(x) &= (ax^2 + bx + c)' \\ &= 2ax + b \end{aligned}$$

である。

(答) $2ax + b$

問 2 (1)

曲線 C_1 が点 $\left(\frac{\sqrt{a}}{a}, 0\right)$ を通ることより、

$$a\left(\frac{\sqrt{a}}{a}\right)^2 + b \cdot \frac{\sqrt{a}}{a} + c = 0$$

$$\therefore 1 + \frac{b\sqrt{a}}{a} + c = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。また、この点における曲線 C_1 の接線の傾きが $-2\sqrt{a}$ であることより、

$$2a \cdot \frac{\sqrt{a}}{a} + b = -2\sqrt{a}$$

$$\therefore b = -4\sqrt{a}$$

が成り立つ。この式を①式に代入して、

$$1 - 4\sqrt{a} \cdot \frac{\sqrt{a}}{a} + c = 0$$

$$\therefore c = 3$$

を得る。

(答) $b = -4\sqrt{a}, c = 3$

(2)

$y = -ax^2 + 1$ のグラフは、 $x = 0$ を軸とする上に凸な放物線であるから、 $x < \frac{\sqrt{a}}{a}$ において、関

数 $g(x)$ は極小値をとらない。一方、 $y = f(x)$ のグラフは

$$f(x) = ax^2 - 4\sqrt{a}x + 3$$

$$= a\left(x - \frac{2\sqrt{a}}{a}\right)^2 - 1$$

より、 $x = \frac{2\sqrt{a}}{a}$ を軸とする下に凸な放物線である。ここで、

$$\frac{\sqrt{a}}{a} < \frac{2\sqrt{a}}{a}$$

であるから、関数 $g(x)$ は $x = \frac{2\sqrt{a}}{a}$ でのみ極小になる。よって題意を満たす a の値は

$$\frac{2\sqrt{a}}{a} = 4$$

$$\therefore a = \frac{1}{4}$$

である。

(答) $a = \frac{1}{4}$

問 3 (1)

$a = 1$ より、

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & (x < 1) \\ x^2 + bx + c & (1 \leq x) \end{cases}$$

である。いま、曲線 C_2 が 2 点 $(2, -1), (3, 0)$ を通ることより、

$$4 + 2b + c = -1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$9 + 3b + c = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

を得る。①、②の連立方程式を解いて、

$$b = -4, c = 3$$

となる。

(答) $b = -4, c = 3$

(2)

$0 \leq t \leq 2$ で $S(t)$ の導関数は正であるから、この区間で $S(t)$ は単調増加する。よって $S(t)$ が

最小となるのは $t = 0$ のときである。また(1)より、

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & (x < 1) \\ x^2 - 4x + 3 & (1 \leq x) \end{cases}$$

である。ここで、 $y = -x^2 + 1$ のグラフは上に凸の放物線であり、

$$-x^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 1$$

より、 $x = \pm 1$ のときに x 軸と交わる。一方、 $y = x^2 - 4x + 3$ のグラフは下に凸の放物線であり、

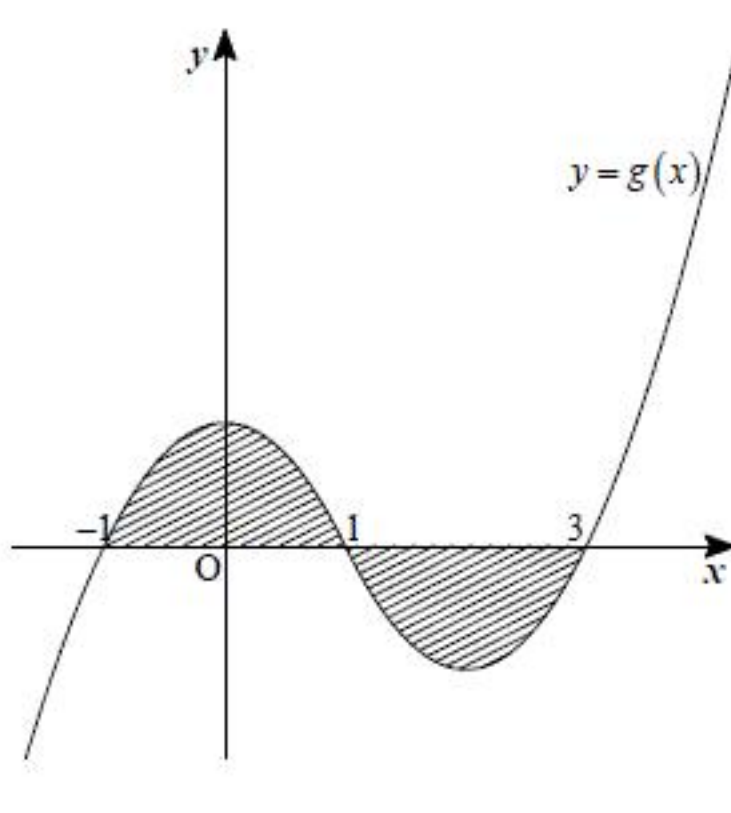
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1, 3$$

より、 $x = 1, 3$ のときに x 軸と交わる。以上より、 $t = 0$ のときの求める領域は以下の斜線部の

ようになる。



よって、

$$\begin{aligned} S(0) &= \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx + \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx \\ &= -\int_{-1}^1 (x+1)(x-1) dx - \int_1^3 (x-1)(x-3) dx \\ &= \frac{1}{6} \{1 - (-1)\}^3 + \frac{1}{6} (3-1)^3 \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

を得る。

(答) $\frac{8}{3}$

(3)

(2)と同様に考えると、 $t = 2$ のときに $S(t)$ が最大となる。このときの直線 $L: y = 2x$ と曲線 C_2 の

交点について、以下のように区間で分けて考える。

[1] $x < 1$ での交点について

この区間において曲線 C_2 の方程式は $y = -x^2 + 1$ であるから、交点の x 座標について

$$2x = -x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\therefore x = -1 \pm \sqrt{2}$$

を得る。これはどちらも $x < 1$ を満たす。

[2] $1 \leq x$ での交点について

この区間において曲線 C_2 の方程式は $y = x^2 - 4x + 3$ であるから、交点の x 座標について

$$2x = x^2 - 4x + 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 3 = 0$$

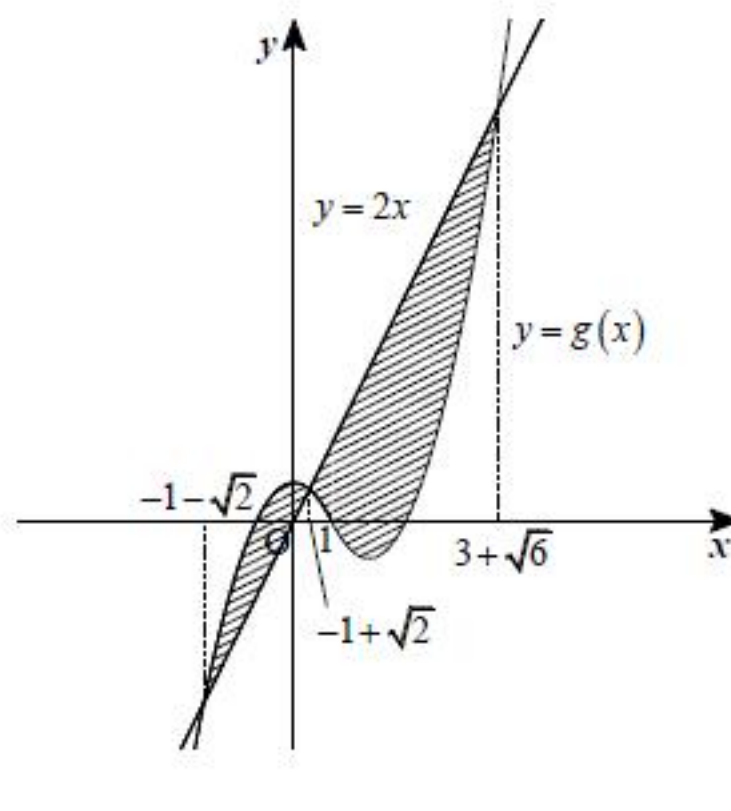
$$\therefore x = 3 \pm \sqrt{6}$$

を得る。 $1 \leq x$ より、 $x = 3 + \sqrt{6}$ のみが求める解である。

以上、[1]、[2]より、求める交点の座標は

$$(-1 - \sqrt{2}, -2 - 2\sqrt{2}), (-1 + \sqrt{2}, -2 + 2\sqrt{2}), (3 + \sqrt{6}, 6 + 2\sqrt{6})$$

である。よって $t = 2$ のときの求める領域は、以下の斜線部のようになる。



ゆえに、

$$\begin{aligned} S(2) &= \int_{-1-\sqrt{2}}^{-1+\sqrt{2}} (-x^2 + 1 - 2x) dx + \int_{-1+\sqrt{2}}^1 \{2x - (-x^2 + 1)\} dx + \int_1^{3+\sqrt{6}} \{2x - (x^2 - 4x + 3)\} dx \\ &= -\int_{-1-\sqrt{2}}^{-1+\sqrt{2}} (x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2}) dx + \int_{-1+\sqrt{2}}^1 (x^2 + 2x - 1) dx + \int_1^{3+\sqrt{6}} (-x^2 + 6x - 3) dx \\ &= \frac{1}{6} \{(-1+\sqrt{2}) - (-1-\sqrt{2})\}^3 + \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x\right]_{-1+\sqrt{2}}^1 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 3x\right]_1^{3+\sqrt{6}} \\ &= \frac{(2\sqrt{2})^3}{6} + \left(\frac{1}{3} + 1 - 1\right) - \left\{\frac{1}{3}(-1+\sqrt{2})^3 + (-1+\sqrt{2})^2 - (-1+\sqrt{2})\right\} \\ &\quad + \left\{-\frac{1}{3}(3+\sqrt{6})^3 + 3(3+\sqrt{6})^2 - 3(3+\sqrt{6})\right\} - \left(-\frac{1}{3} + 3 - 3\right) \\ &= 4\sqrt{2} + 4\sqrt{6} + 8 \end{aligned}$$

である。

(答) 交点の座標: $(-1 - \sqrt{2}, -2 - 2\sqrt{2}), (-1 + \sqrt{2}, -2 + 2\sqrt{2}), (3 + \sqrt{6}, 6 + 2\sqrt{6})$

最大値: $4\sqrt{2} + 4\sqrt{6} + 8$