

問題 1

問 1(1)

接線  $L$  と直線  $OP$  は垂直に交わるから、直線  $OP$  の傾きを  $m$  とおくと、

$$am = -1$$
$$\therefore m = -\frac{1}{a}$$

である。

(答)  $-\frac{1}{a}$

(2)

条件より、

$$m = -\frac{1}{a} = \tan \theta$$
$$a = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

である。ここで、 $a > 0$  であるから、 $\sin \theta$  と  $\cos \theta$  の正負は互いに異なる。また、円  $C$  の半径は 1 であるから、 $P(\cos \theta, \sin \theta)$  である。点  $P$  は接線  $L$  上にあるから

$$\sin \theta = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot \cos \theta + b$$
$$b = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta}$$

となる。 $b > 0$  であるから  $\sin \theta > 0$  である。したがって  $\cos \theta < 0$  であるから、

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta}$$

である。以上から、

$$a = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}{\sin \theta}$$
$$b = \frac{1}{\sin \theta}$$

である。

(答)  $a = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}{\sin \theta}, b = \frac{1}{\sin \theta}$

(3)

点  $A$  の  $x$  座標は、方程式  $0 = ax + b$  すなわち

$$0 = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} x + \frac{1}{\sin \theta}$$

の解である。したがって、点  $A$  の座標は

$$A\left(\frac{1}{\cos \theta}, 0\right)$$

である。 $\cos \theta < 0$  であるから

$$OA = -\frac{1}{\cos \theta}$$

である。また、点  $B$  の  $y$  座標は、方程式  $y = a \cdot 0 + b$  の解である。すなわち

$$y = \frac{1}{\sin \theta}$$

となり、点  $B$  の座標は

$$B\left(0, \frac{1}{\sin \theta}\right)$$

である。 $\sin \theta > 0$  であるから

$$OB = \frac{1}{\sin \theta}$$

である。以上から、

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\cos \theta}\right) \cdot \frac{1}{\sin \theta} = -\frac{1}{2 \sin \theta \cos \theta} = -\frac{1}{\sin 2\theta}$$

となる。

(答)  $S = -\frac{1}{\sin 2\theta}$

問 2(1)

問 1 より、

$$a = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{2\pi}{3}}}{\sin \frac{2\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$b = \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$
$$S = -\frac{1}{\sin\left(2 \cdot \frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

となる。

(答)  $a = \frac{\sqrt{3}}{3}, b = \frac{2\sqrt{3}}{3}, S = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

(2)

$A\left(\frac{1}{\cos \theta}, 0\right), B\left(0, \frac{1}{\sin \theta}\right)$  である。

$$\frac{1}{\cos \frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$
$$\frac{1}{\sin \frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

より、 $A(-2, 0), B\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$  となる。

(答)  $A(-2, 0), B\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

(3)

$$\tan\left(2 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

となる。

(答)  $\sqrt{3}$

問 3

$S = -\frac{1}{\sin 2\theta}$  であるから、 $\sin 2\theta = -1$  のときに面積は最小値

$$S = \frac{-1}{-1} = 1$$

となる。これを  $0 < \theta < 2\pi$  で

解くと  $2\theta = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$ , すなわち  $\theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$  となる。このうち  $\cos \theta < 0, \sin \theta > 0$  を満たすのは

$\theta = \frac{3\pi}{4}$  のみである。

(答)  $\theta = \frac{3\pi}{4}, S = 1$

問 4

問 3 から  $\sin 2\theta$  は  $\theta$  が  $\pi$  の周期で変化するとわかるが、 $\cos \theta < 0, \sin \theta > 0$  の条件を満たすものは  $2\pi$  の周期である。よって  $0 < \theta < 200\pi$  で条件を満たす  $\theta$  は、

$$\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} + 2\pi, \frac{3\pi}{4} + 4\pi, \dots, \frac{3\pi}{4} + 198\pi$$

となる。個数は  $\frac{198\pi}{2\pi} + 1 = 100$  であるから、総和は

$$\frac{\left\{\frac{3\pi}{4} + \left(\frac{3\pi}{4} + 198\pi\right)\right\} \cdot 100}{2} = \left(\frac{3\pi}{2} + 198\pi\right) \cdot 50$$
$$= 75\pi + 9900\pi$$
$$= 9975\pi$$

となる。

(答)  $9975\pi$

# 問題 2

問 1(1)

線分 OQ の長さは  $t$  であり、線分 PQ の長さは  $t^2 - 4t + 5$  であるから、  

$$L(t) = t + t^2 - 4t + 5 = t^2 - 3t + 5$$
である。

(答)  $L(t) = t^2 - 3t + 5$

(2)

$L(t) = t^2 - 3t + 5$  を平方完成すると  

$$t^2 - 3t + 5 = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 5 = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$$
となる。 $L(t)$  が最小値をとるとき、 $t = \frac{3}{2}$  であり、 $L\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{11}{4}$  である。

(答)  $t = \frac{3}{2}$ , 最小値  $\frac{11}{4}$

問 2(1)

放物線  $C$  の方程式を平方完成すると  

$$y = x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$$
であるから、頂点 A の座標は  
A(2, 1)  
である。

(答) A(2, 1)

(2)

頂点 A の座標から、直線 OP の方程式は  

$$y = \frac{1}{2}x$$
である。この直線と放物線  $C$  との交点の  $x$  座標は  

$$x^2 - 4x + 5 = \frac{1}{2}x$$
の解である。これを解くと、  

$$x^2 - \frac{9}{2}x + 5 = 0$$

$$x = \frac{\frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 20}}{2}$$

$$x = \frac{5}{2}, 2$$

となる。直線 OP と放物線  $C$  で囲まれた区間は放物線が直線より下にあるから、求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_2^{\frac{5}{2}} \left\{ \frac{1}{2}x - (x^2 - 4x + 5) \right\} dx &= \int_2^{\frac{5}{2}} \left( -x^2 + \frac{9}{2}x - 5 \right) dx \\ &= \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{9}{4}x^2 - 5x \right]_2^{\frac{5}{2}} \\ &= \left( -\frac{125}{24} + \frac{225}{16} - \frac{25}{2} \right) - \left( -\frac{8}{3} + 9 - 10 \right) \\ &= \frac{1}{48} \end{aligned}$$

となる。

(答)  $\frac{1}{48}$

(3)

放物線の方程式を微分すると、  

$$y' = 2x - 4$$
となる。直線 OP の傾きは、条件より  $t \neq 0$  であるから、  

$$\frac{t^2 - 4t + 5}{t}$$

と表せる。直線 OP が放物線  $C$  の接線となるとき、接線は点 P で接するから、

$$\frac{t^2 - 4t + 5}{t} = 2t - 4$$

が成り立つ。これを  $t > 0$  のもとで解くと、

$$\begin{aligned} t^2 - 4t + 5 &= 2t^2 - 4t \\ t^2 - 5 &= 0 \\ \therefore t &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

となる。また、このときの直線 OP の傾きは、 $2\sqrt{5} - 4$  となるから、この直線の方程式は、

$$y = (2\sqrt{5} - 4)x$$

となる。

(答)  $t = \sqrt{5}$ ,  $y = (2\sqrt{5} - 4)x$

問 3(1)

OQ  $\perp$  PQ であるから、  

$$S_1(t) = \frac{1}{2} \cdot t \cdot f(t) = \frac{t^3 - 4t^2 + 5t}{2}$$

となる。これを  $t$  で微分すると、

$$S_1'(t) = \frac{3t^2 - 8t + 5}{2}$$

となる。

(答)  $S_1(t) = \frac{t^3 - 4t^2 + 5t}{2}$ ,  $S_1'(t) = \frac{3t^2 - 8t + 5}{2}$

(2)

$S_1(t)$  の導関数について、  

$$S_1'(t) = \frac{3t^2 - 8t + 5}{2} = \frac{1}{2}(t - 1)(3t - 5)$$

と変形できる。極値をとるときの  $t$  の値は  $1, \frac{5}{3}$  である。 $0 < t \leq 2$  の範囲での増減表を下に示す。

|           |              |     |   |     |                 |     |   |
|-----------|--------------|-----|---|-----|-----------------|-----|---|
| $t$       | 0            | ... | 1 | ... | $\frac{5}{3}$   | ... | 2 |
| $S_1'(t)$ | <div>↗</div> | +   | 0 | -   | 0               | +   |   |
| $S_1(t)$  | <div>↗</div> | ↗   | 1 | ↘   | $\frac{25}{27}$ | ↗   | 1 |

増減表から、極大点は (1, 1)、極小点は  $\left(\frac{5}{3}, \frac{25}{27}\right)$  である。

(答) 極大点 (1, 1)、極小点  $\left(\frac{5}{3}, \frac{25}{27}\right)$

(3)

$S_2(t)$  は放物線  $C$  と  $x, y$  軸および直線 PQ で囲まれた部分から  $\triangle OPQ$ 、すなわち  $S_1(t)$  を除いた面積である。したがって、

$$\begin{aligned} S_2(t) &= \int_0^t (x^2 - 4x + 5) dx - \frac{t^3 - 4t^2 + 5t}{2} \\ &= \left[ \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x \right]_0^t - \frac{t^3 - 4t^2 + 5t}{2} \\ &= \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 5t - \frac{t^3 - 4t^2 + 5t}{2} \\ &= -\frac{1}{6}t^3 + \frac{5}{2}t \end{aligned}$$

関数  $S_2(t)$  の導関数は

$$S_2'(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}(t^2 - 5)$$

である。 $0 < t \leq 2$  の範囲で  $S_2'(t) > 0$  であり、この範囲で関数  $S_2(t)$  は単調に増加するから、

$S_2(t)$  の最大値は、

$$\begin{aligned} S_2(2) &= -\frac{1}{6} \cdot 2^3 + \frac{5}{2} \cdot 2 \\ &= \frac{11}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答)  $\frac{11}{3}$