

問題 1

問 1(1)

円 C は 2 点 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ を直径の両端とするから、円 C の中心の座標を (x_0, y_0)

とすると

$$x_0 = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = 0$$

$$y_0 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = 0$$

となるから、中心の座標は $(0, 0)$ である。したがって、半径は

$$\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$$

と求まる。よって、円 C の方程式は

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。直線 L は点 $(1, -2)$ を通り、傾きが -1 であるから、方程式は

$$y = -(x-1) - 2$$

$$\therefore y = -x - 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。

(答) 円 $C: x^2 + y^2 = 1$, 直線 $L: y = -x - 1$

(2)

①, ②より y を消去すると、円 C と直線 L の交点の x 座標は

$$x^2 + (-x-1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x(x+1) = 0$$

$$\therefore x = 0, -1$$

と求まる。 $x_1 < x_2$ より $x_1 = -1, x_2 = 0$ となるから、②より

$$y_1 = -x_1 - 1 = 0$$

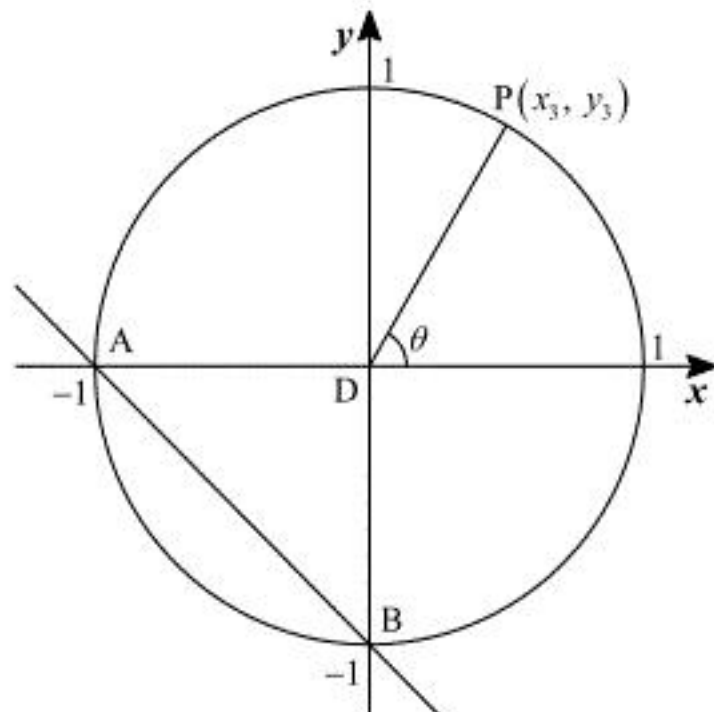
$$y_2 = -x_2 - 1 = -1$$

となる。したがって $A(-1, 0), B(0, -1)$ となる。

(答) $A(-1, 0), B(0, -1)$

(3)

(1), (2)の結果より円 C , 直線 L および、点 A, B, P を図示すると以下のようになる。



(2)より線分 AB の長さは

$$\sqrt{(-1-0)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{2}$$

となる。また、 $\angle ADB = \frac{\pi}{2}$ だから、弧 AB に対する円周角の定理より

$$\angle APB = \frac{1}{2} \angle ADB = \frac{\pi}{4}$$

となる。

(答) $AB = \sqrt{2}, \angle APB = \frac{\pi}{4}$

(4)

$y_3 > -1 - x_3$ より点 P は直線 L の上側にあるため、(3)の図より θ の値の取りうる範囲は

$$0 \leq \theta < \pi, \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$$

となる。

(答) $0 \leq \theta < \pi, \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$

問 2(1)

問 1 の(3)の図より

$$P(\cos \theta, \sin \theta)$$

となる。

(答) $(\cos \theta, \sin \theta)$

(2)

問 1 の(2), 問 2 の(1)より

$$AP = \sqrt{(\cos \theta + 1)^2 + \sin^2 \theta} = \sqrt{2 + 2 \cos \theta}$$

$$BP = \sqrt{\cos^2 \theta + (\sin \theta + 1)^2} = \sqrt{2 + 2 \sin \theta}$$

となる。

(答) $AP = \sqrt{2 + 2 \cos \theta}, BP = \sqrt{2 + 2 \sin \theta}$

(3)

問 1 の(3), 問 2 の(2)より、 $\triangle APB$ の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot AP \cdot BP \cdot \sin \angle APB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 + 2 \cos \theta} \cdot \sqrt{2 + 2 \sin \theta} \cdot \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \sqrt{\frac{(1 + \cos \theta)(1 + \sin \theta)}{2}}$$

となる。

(答) $\sqrt{\frac{(1 + \cos \theta)(1 + \sin \theta)}{2}}$

問 3(1)

与えられた方程式を変形して

$$\sin 2\theta + 2 \sin \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \theta \cos \theta + 2 \sin \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta (\cos \theta + 1) = 0$$

となる。 $0 \leq \theta < \pi, \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ より $\cos \theta \neq -1$ だから

$$\sin \theta = 0$$

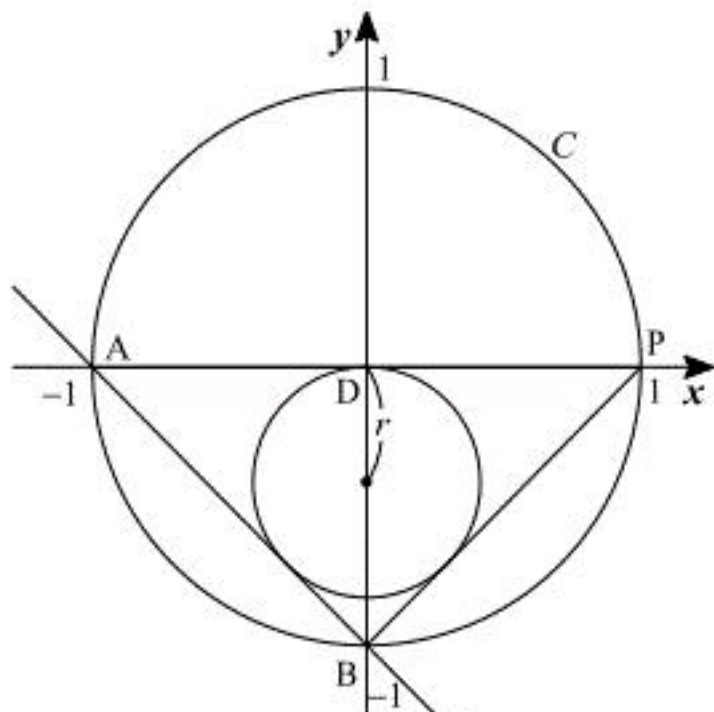
$$\therefore \theta = 0$$

となる。

(答) 0

(2)

$\triangle APB$ の内接円の半径を r とすると、 $\theta = 0$ のとき $\triangle APB$ の内接円は以下のように図示できる。



$\theta = 0$ のとき、問 2 の(2), (3)より $AP = 2, BP = \sqrt{2}, \triangle APB = 1$ となるから

$$\frac{1}{2} r (AP + BP + AB) = 1$$

$$\Leftrightarrow r (2 + 2\sqrt{2}) = 2$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$$

$$\therefore r = \sqrt{2} - 1$$

となる。よって、図より $\triangle APB$ の内接円の中心の座標は $(0, 1 - \sqrt{2})$ となる。

(答) 半径: $\sqrt{2} - 1$, 中心の座標: $(0, 1 - \sqrt{2})$

問題 2

問 1(1)

$f(x) = -(x-1)^2 + 2$ より $y = f(x)$ の頂点の座標は $(1, 2)$ となる。

(答) $(1, 2)$

(2)

$$f'(x) = -2(x-1)$$

だから、 $x = t$ における $y = f(x)$ の接線の方程式は

$$y = -2(t-1)(x-t) - (t-1)^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow y = -2(t-1)x + t^2 + 1$$

となる。よって

$$a = -2(t-1)$$

$$b = t^2 + 1$$

となる。

(答) $a = -2(t-1), b = t^2 + 1$

(3)

$t^2 \geq 0$ より $t = 0$ のときに $b = t^2 + 1$ は最小値をとるから、 $a = 2, b = 1, t = 0$ となる。

(答) $a = 2, b = 1, t = 0$

問 2(1)

$y = g(x)$ は $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向へ 1 だけ平行移動させた放物線だから

$$y = g(x)$$

$$\Leftrightarrow y = f(x-1)$$

$$\Leftrightarrow y = -(x-2)^2 + 2$$

となる。

(答) $y = -(x-2)^2 + 2$

(2)

まず曲線 C の方程式を求める。 $\frac{1}{2}f(x) \geq 0$ となる x の範囲は

$$\frac{1}{2}f(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -(x-1)^2 + 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2}) \leq 0$$

$$\therefore 1-\sqrt{2} \leq x \leq 1+\sqrt{2}$$

となる。一方、 $x < 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2} < x$ では $\frac{1}{2}f(x) < 0$ となる。よって、曲線 C の方程式は

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2}f(x) & (1-\sqrt{2} \leq x \leq 1+\sqrt{2}) \\ -\frac{1}{2}f(x) & (x < 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2} < x) \end{cases}$$

と表される。以下、 x の範囲で場合分けをする。

[1] $1-\sqrt{2} \leq x \leq 1+\sqrt{2}$ のとき

2 曲線の交点の x 座標は、 y を消去して

$$g(x) = \frac{1}{2}f(x)$$

$$\Leftrightarrow -(x-2)^2 + 2 = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = 1 \left(\because 1-\sqrt{2} \leq x \leq 1+\sqrt{2} \right)$$

と求まる。このとき y 座標は

$$y = g(1) = 1$$

である。よって、 $1-\sqrt{2} \leq x \leq 1+\sqrt{2}$ における曲線 C と放物線 $y = g(x)$ の交点の座標は

$(1, 1)$ となる。

[2] $x < 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2} < x$ のとき

2 曲線の交点の x 座標は、 y を消去して

$$g(x) = -\frac{1}{2}f(x)$$

$$\Leftrightarrow -(x-2)^2 + 2 = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 3 \left(\because x < 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2} < x \right)$$

と求まる。このとき y 座標は

$$y = g(3) = 1$$

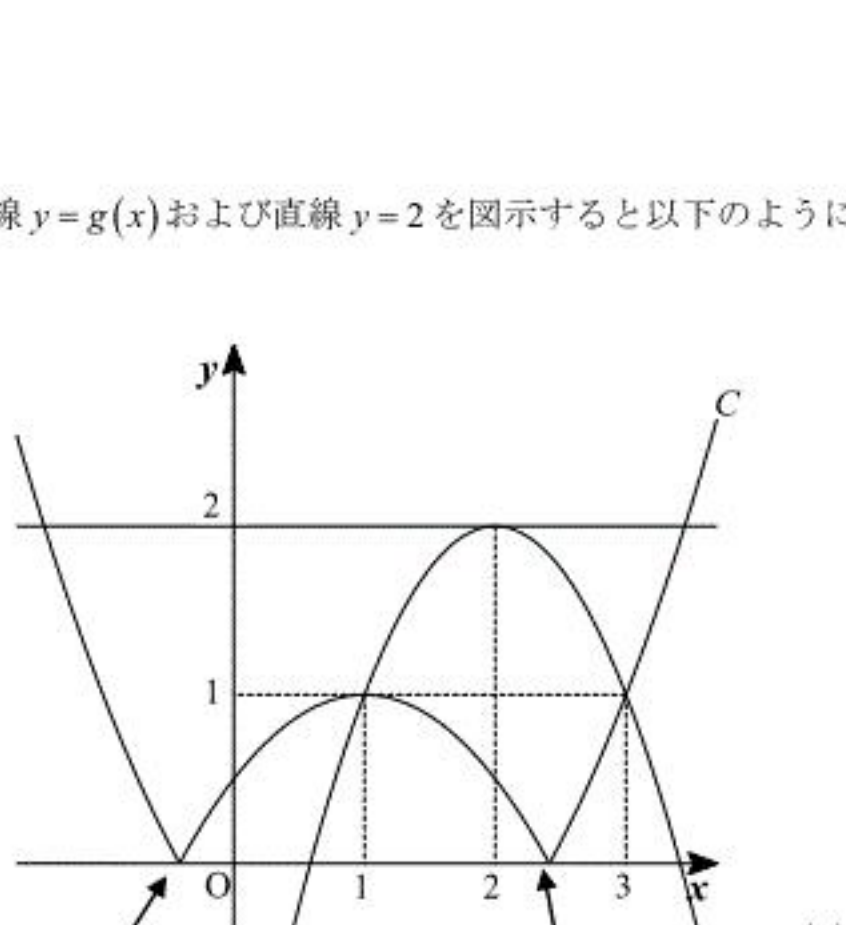
である。よって、 $x < 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2} < x$ における曲線 C と放物線 $y = g(x)$ の交点の座標は $(3, 1)$ となる。

以上、[1], [2] より、曲線 C と放物線 $y = g(x)$ のすべての共有点の座標は $(1, 1), (3, 1)$ となる。

(答) $(1, 1), (3, 1)$

(3)

(2)より曲線 C 、放物線 $y = g(x)$ および直線 $y = 2$ を図示すると以下のようになる。



図より、曲線 C と直線 $y = 2$ は $x < 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2} < x$ の範囲のみに共有点をもつから

$$-\frac{1}{2}f(x) = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-1)^2 - 1 = 2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1-\sqrt{6})(x-1+\sqrt{6}) = 0$$

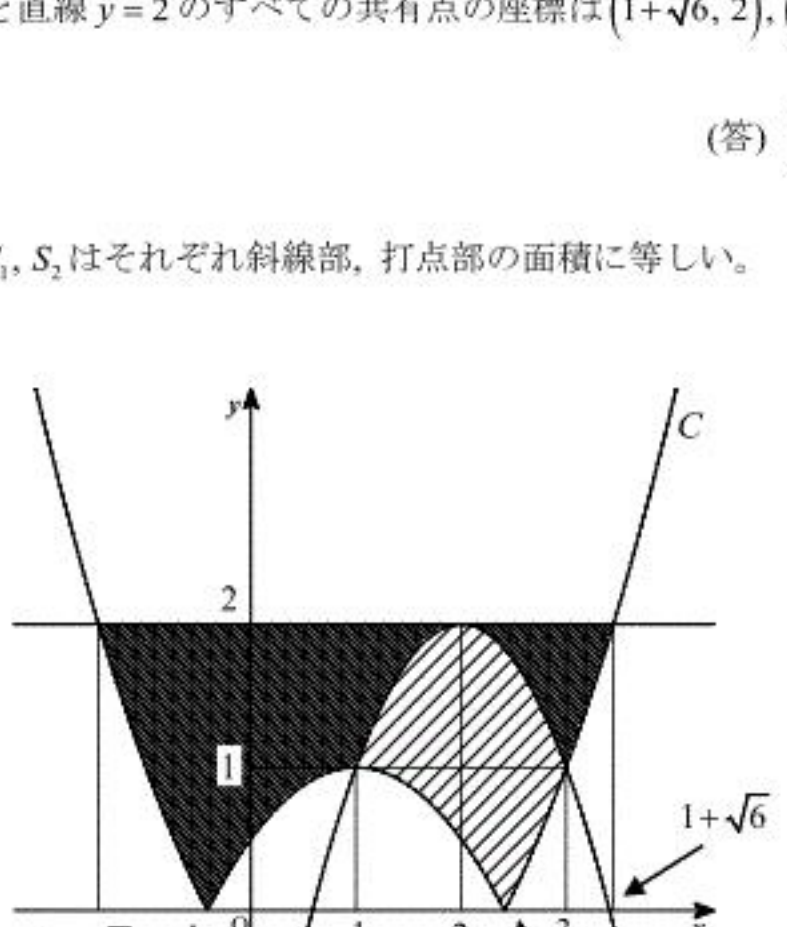
$$\therefore x = 1+\sqrt{6}, 1-\sqrt{6}$$

となるので、曲線 C と直線 $y = 2$ のすべての共有点の座標は $(1+\sqrt{6}, 2), (1-\sqrt{6}, 2)$ となる。

(答) $(1+\sqrt{6}, 2), (1-\sqrt{6}, 2)$

(4)

以下の図において、 S_1, S_2 はそれぞれ斜線部、打点部の面積に等しい。



上図より

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_1^3 \left\{ g(x) - \left| \frac{1}{2}f(x) \right| \right\} dx \\ &= \int_1^3 g(x) dx + \int_{1-\sqrt{6}}^1 \frac{1}{2}f(x) dx - \int_1^{1+\sqrt{6}} \frac{1}{2}f(x) dx \\ &= \int_1^3 \{ -(x-2)^2 + 2 \} dx + \frac{1}{2} \int_{1-\sqrt{6}}^1 \{ -(x-1)^2 + 2 \} dx - \frac{1}{2} \int_1^{1+\sqrt{6}} \{ -(x-1)^2 + 2 \} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}(x-2)^3 + 2x \right]_1^3 + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{3}(x-1)^3 + 2x \right]_{1-\sqrt{6}}^1 - \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{3}(x-1)^3 + 2x \right]_1^{1+\sqrt{6}} \\ &= \left(-\frac{1}{3} + 6 \right) - \left(\frac{1}{3} + 2 \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{8}{3} + 6 \right) - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} + 2 + 2\sqrt{2} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} + 2 + 2\sqrt{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \\ &= 4 - \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

となる。ここで、曲線 C と直線 $y = 2$ で囲まれた部分の面積を S_3 とすると

$$S_2 = S_3 - S_1$$

と表せるから、まず S_3 を求める。図より $\left| \frac{1}{2}f(x) \right|$ は直線 $x = 1$ に関して対称であることに注意

して

$$\begin{aligned} S_3 &= \int_{1-\sqrt{6}}^{1+\sqrt{6}} \left\{ 2 - \left| \frac{1}{2}f(x) \right| \right\} dx \\ &= \int_{1-\sqrt{6}}^{1+\sqrt{6}} 2 dx - \int_1^{1+\sqrt{6}} \left| f(x) \right| dx \\ &= \left[2x \right]_{1-\sqrt{6}}^{1+\sqrt{6}} - \int_{1-\sqrt{6}}^{1+\sqrt{6}} \{ (x-1)^2 - 2 \} dx - \int_1^{1+\sqrt{6}} \{ -(x-1)^2 + 2 \} dx \\ &= 4\sqrt{6} - \left[\frac{1}{3}(x-1)^3 - 2x \right]_{1-\sqrt{6}}^{1+\sqrt{6}} - \left[-\frac{1}{3}(x-1)^3 + 2x \right]_1^{1+\sqrt{6}} \\ &= 4\sqrt{6} - (2\sqrt{6} - 2 - 2\sqrt{6}) + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - 2 - 2\sqrt{2} \right) - \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} + 2 + 2\sqrt{2} \right) + 2 \\ &= 4\sqrt{6} - \frac{8\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} S_2 &= S_3 - S_1 \\ &= \left(4\sqrt{6} - \frac{8\sqrt{2}}{3} \right) - \left(4 - \frac{4\sqrt{2}}{3} \right) \\ &= 4\sqrt{6} - \frac{4\sqrt{2}}{3} - 4 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $S_1 = 4 - \frac{4\sqrt{2}}{3}, S_2 = 4\sqrt{6} - \frac{4\sqrt{2}}{3} - 4$