

1

次の小問に答えよ. (1), (2), (3)は独立しているので, どの順に解いてもよい.

(4)は(1), (2), (3)の結果を使ってもよい.

(1) $0 < b_i < 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$)をみたす $b_1, b_2, \dots, b_n$ に対して不等式

$$(1 - b_1)(1 - b_2) \cdots (1 - b_n) \geq 1 - \sum_{i=1}^n b_i$$

が成り立つことを示せ.

(2) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ に対して

$$\cos \theta > 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

が成り立つことを示せ.

(3) 半径 r の円に内接する正 2^n 角形を描いて, さらにこの正 2^n 角形に内接する円を描いた時, この内接円の半径を求めよ.

(4) O を中心とする半径 1 の円 B_1 に内接する正 4 角形 A_1 を描く. 次に正 4 角形 A_1 に内接する円 B_2 を描き, さらに円 B_2 に内接する正 2^3 角形 A_2 を描く. 以下

- ・円 B_n に内接する正 2^{n+1} 角形 A_n
- ・正 2^{n+1} 角形 A_n に内接する円 B_{n+1}

を描くという操作を順次繰り返す. n をいくら大きくしても, 円 B_n および正 2^{n+1} 角形 A_n は, O を中心とするある一定の円内には入ってこないことを示せ.

2

 xyz 空間内において不等式

$$0 \leq z \leq \log(-x^2 - y^2 + 3), \quad -x^2 - y^2 + 3 > 0$$

で定まる立体 D を考える.

- (1) D はどの座標軸のまわりの回転体か, その座標軸を答えよ.
- (2) この D を xz 平面で切った時の断面は, どのような曲線(ならびに直線)で囲まれた図形か, その曲線を求め, 図形の概形も描け. 曲線の凹凸を調べることはしなくてよいが, 座標軸との交点の座標は明示せよ.
- (3) D の体積を求めよ.