

数 学 ⑧

解答は、それぞれ問題の番号に対応する答案用紙に書くこと。この指示に従わない答案は無効とする。

1 数列 $\{x_i\}$ が次の漸化式を満たしている。

$$x_{i+1} = \frac{x_i^2 + 1}{2} \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) すべての自然数 i に対して、 $x_{i+1} \geq x_i$ が成り立つことを示せ。
- (2) $|x_1| \leq 1$ のとき、すべての自然数 i に対して $x_i \leq 1$ であることを示せ。
- (3) 自然数 n に対して、等式

$$x_{n+1} - x_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - 1)^2$$

が成り立つことを示せ。

- (4) $|x_1| \leq 1$ のとき、

$$x_{n+1} - x_1 \geq \frac{n}{2} (x_n - 1)^2$$

が成り立つことを示せ。

- (5) 初項 x_1 の値に応じて、数列 $\{x_i\}$ の収束、発散について調べ、収束するとき
は極限値を求めよ。

2

関数 $f(x) = ae^x \sin x + e^{-x} \cos x$ について、以下の問いに答えよ.

- (1) $a = 1$ のとき $-\pi \leq x \leq \pi$ の範囲で $y = f(x)$ の増減を調べ、グラフの概形を描け. グラフの凹凸を調べることはしなくてよい.
- (2) $I = \int_0^b f(x) dx$ の値を求めよ.
- (3) $b = \pi$ のとき、 $I = 0$ となる a の値を求めよ.