

数 学 問 題

解答は、それぞれ問題の番号に対応する答案用紙に
書くこと。この指示に従わない答案は無効とする。

- 1** n を自然数とする。 n 円の商品一個の買い物に対して消費税が次のように定まるものとする。

消費税 = ($n \times 0.05$ の小数部分を切り捨てた整数) 円

また、この商品を買ったときの税込みの支払い総額 T 円は

$$T \text{ 円} = n \text{ 円} + \text{消費税}$$

となる。どのような自然数 n に対しても n 円の商品が存在するものとして、次の各問に答えよ。

- (1) 1 から 50 までの自然数で、 T として決して現れないものをすべて求めよ。
- (2) T として決して現れない自然数をすべて求めよ。
- (3) m を 2 以上の任意の自然数とする。商品 A を買ったときの税込みの支払い総額を T_A 円とし、また別の店で商品 B を買ったときの税込みの支払い総額を T_B 円とする。このとき、適当な商品 A, B を選べば、 $T_A + T_B = m$ となりうることを示せ。

2 a, b, c を正の実数とし, x の 3 次方程式

$$x^3 + ax^2 - bx - c = 0$$

を考える.

(1) この方程式が三つの相異なる実数解をもつとき, $y = x^3 + ax^2$ および $y = bx + c$ のグラフをひとつの xy 座標平面上に描け.

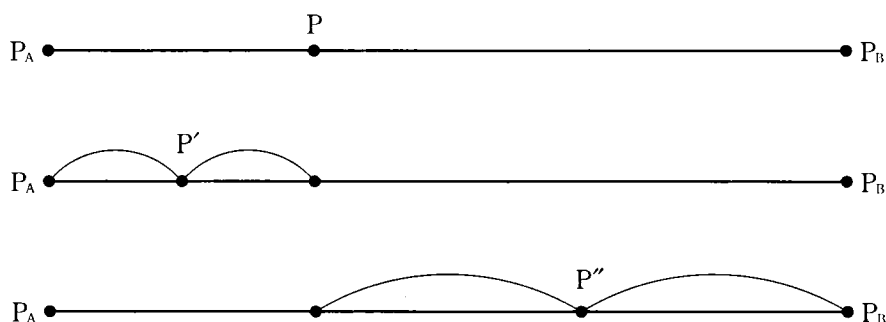
(2) 整式 $x^3 + ax^2 - bx - c$ が複素数 α, β, γ を用いて

$$x^3 + ax^2 - bx - c = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

と一次式の積の形に表されているとする. このとき $\beta + \gamma, \beta\gamma$ をそれぞれ a と a, b, c を用いて表せ.

(3) (2)において, a が正の実数のとき, β, γ はともに負の実数であるか, またはともに実部が負の複素数であることを示せ.

- 3 直線上に2点 P_A, P_B がある. A と B が線分 $P_A P_B$ 上で陣取り合戦をじゃんけん勝負で行う. ルールは次のようなものである. 線分 $P_A P_B$ 上に点 P があり, じゃんけんで A が勝てば P を P_A の方に $\frac{\overline{P_A P}}{2}$ だけ動かし, B が勝てば P を P_B の方に $\frac{\overline{P_B P}}{2}$ だけ動かす. あいこなら P はそのまま動かさない. ただしここで $\overline{P_A P}, \overline{P_B P}$ はそれぞれ線分 $P_A P, P_B P$ の長さを表すものとする. 例えば下図において A が勝てば P は P' の位置に移動し, B が勝てば P は P'' の位置に移動し, あいこのときは P はそのままである.



はじめに点 P が線分 $P_A P_B$ を $1:2$ に内分する位置にあったとする. n を自然数とする. n 回じゃんけんを行った後, 点 P がはじめの位置にある確率を $P(n)$ とし, また点 P が線分 $P_A P_B$ を $2:1$ に内分する位置にある確率を $Q(n)$ とする.

- (1) $P(2), Q(2)$ を求めよ.
- (2) $P(3), Q(3)$ を求めよ.
- (3) $P(n+1), Q(n+1)$ を $P(n), Q(n)$ を用いて表せ.
- (4) $P(n)$ を求めよ.