

数 学 専 門 ①

解答は、それぞれ問題の番号に対応する答案用紙に
書くこと。この指示に従わない答案は無効とする。

- 1** ある物体は、つねに二つの状態 A と B のどちらかにあり、時間と共に一定の確率で変化を続けているものとする。物体が状態 A であるとき 1 秒後に状態 A である確率を $\frac{2}{3}$ とし、また物体が状態 B であるとき 1 秒後に状態 A である確率を $\frac{1}{3}$ とする。自然数 n に対して、物体が初めに状態 A であるとき、 n 秒後に状態 A である確率を p_n 、状態 B である確率を q_n と表す。

- (1) p_2 および q_2 を求めよ。
(2) すべての自然数 n に対して関係式

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$$

が成り立つような 2 次の正方行列 M を求めよ。

- (3) 以下の 2 つの等式を示せ。

$$\begin{aligned} M(M - E) &= \frac{1}{3}(M - E) \\ M(M - \frac{1}{3}E) &= M - \frac{1}{3}E \end{aligned}$$

ただし、ここで E は単位行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を表す。

- (4) X を 2 次の正方行列、 k を定数とし $MX = kX$ であるとき、すべての自然数 n に対して

$$M^n X = k^n X$$

となることを示せ。

- (5) 自然数 n に対して M^n を求めよ。

2

自然数 n に対して $I(n) = \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) 次の等式が成り立つことを示せ.

$$I(n+2) = -\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{n+1}{2}I(n)$$

(2) 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$0 \leq I(n) \leq \frac{1}{n+1}$$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n I(n)$ を求めよ.

3

 n を自然数とする.

- (1)
- $0 < i < n$
- となる整数
- i
- に対して

$${}_nC_i = {}_{n-1}C_i + {}_{n-1}C_{i-1}$$

となることを示せ.

- (2)
- $2m \leq n$
- となる最大の整数
- m
- に対して

$$\sum_{i=0}^m {}_nC_{2i} = 2^{n-1}$$

となることを示せ.

- (3)
- $0 \leq i \leq n-1$
- となる整数
- i
- に対して

$$\sum_{j=0}^i (-1)^j {}_nC_j = (-1)^i {}_{n-1}C_i$$

となることを示せ.

ただし ${}_0C_0 = 1$ である。

4

$f(x)$ を x の関数とし、すべての実数 x, y に対して次の等式

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

が成り立っているものとする。以下の問いに答えよ。

(1) $f(0) = 0$ であることを示せ。また、すべての実数 x に対して

$f(-x) = -f(x)$ が成り立つことを示せ。

(2) すべての 0 でない整数 n に対して

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{f(1)}{n}$$

であることを示せ。

(3) $f(x)$ の $x = 0$ における微分係数 $f'(0)$ が定まるとき、 $f'(0) = f(1)$ となることを示せ。