

①

(1) $a=0$ のとき $x^2+1=0 \therefore \alpha, \beta = \pm i$
 $\therefore S(0)=0$ ----- (答)

$a=\frac{1}{2}$ のとき $x^2-x+1=0 \therefore \alpha, \beta = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$
 $\therefore S(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ----- (答)

$a=1$ のとき $x^2-2x+1=0 \therefore \alpha=\beta=1$
 $\therefore S(1)=0$ ----- (答)

(2) α, β が実数のときは $S(a)=0$ となる。そのときは
 $a^2-1 \geq 0 \therefore a \leq -1, 1 \leq a$
 α, β が虚数のときは, α, β は共役複素数になる
 ので, 実軸に対称な点を表す。その場合に
 $S(a)=0$ となるのは, α, β が純虚数のときだけで
 ある。それは $a=0$ のときである。

以上をまとめると

$a \leq -1, a=0, 1 \leq a$ ----- (答)

(3) (2)より, $S(a)=0$ の場合を除いて考えると

$-1 < a < 1, a \neq 0$

としてよく, α, β は共役複素数で

$\alpha = p + qi, \beta = p - qi$

と表せる。角と係数の関係より

$\alpha + \beta = 2a \therefore 2p = 2a \therefore p = a$

$\alpha\beta = 1 \therefore p^2 + q^2 = 1 \therefore q = \pm \sqrt{1-a^2}$

となる。このとき

$$S(a) = |p||q| = |a|\sqrt{1-a^2} = \sqrt{a^2-a^4}$$

$$= \sqrt{-(a^2 - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}$$

であるから, これは $a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最大となる。

$S(a)$ の最大値は存在し $S(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}$ ----- (答)

②

(1) 円の面積から、正六角形の面積を引いたものだから、
 $\pi \cdot 1^2 - 6 \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin 60^\circ \right) = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ----- (答)

(2) 小正六角形 T_2 の頂点は P_1P_3 を 3 等分する。よって
 その一辺の長さは

$$\frac{P_1P_3}{3} = \frac{2 \cos 30^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ----- (答)}$$

(3) これらの正六角形は相似比 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，面積比 $\frac{1}{3}$ となる
 から， S_n は等比数列で，初項は (1) の値。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n S_k &= \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)} \\ &= \frac{3}{2} \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\} \text{ ----- (答)} \end{aligned}$$

[3]

(1) $f(x) = 3x^2 + 2x - a$

$P(-1, 0)$ での接線の方程式は

$$y = (1-a)(x+1)$$

曲線の式と連立して

$$x^3 + x^2 - ax - a = (1-a)(x+1)$$

$$\therefore (x+1)^2(x-1) = 0$$

$x = -1$ 以外の解は $x = 1, f(1) = 2(1-a)$

求める点は $(1, 2(1-a))$ ----- (答)

(2) $f(x) = (x+1)(x^2 - a)$

よって $x \geq 0$ であれば、解は $x = -1, \pm\sqrt{a}$

解の個数は以下のとおり

$a < 0$ のとき 1個

$a = 0, a = 1$ のとき 2個

$0 < a < 1, 1 < a$ のとき 3個

----- (答)

(3) $f'(x) = 0$ が異なる実数解をもつのは

$$1 + 3a > 0 \quad \therefore a > -\frac{1}{3}$$

のとき、そのときの実数解は

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3a}}{3}$$

$f(x)$ と $f'(x)$ と割ると

$$f(x) = f'(x) \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9} \right) - \left(\frac{2}{3}a + \frac{2}{9} \right)x - \frac{8}{9}a$$

となるから、これに代入すると

$$f\left(\frac{-1 \pm \sqrt{1+3a}}{3}\right) = -\left(\frac{2}{3}a + \frac{2}{9}\right)\frac{-1 \pm \sqrt{1+3a}}{3} - \frac{8}{9}a$$

$$= \mp \frac{2}{27}(1+3a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}a + \frac{2}{27}$$

したがって、

$a \leq -\frac{1}{3}$ のときは極値はない。

$a > -\frac{1}{3}$ のときは

$x = \frac{-1 + \sqrt{1+3a}}{3}$ で極小値

$$-\frac{2}{27}(1+3a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}a + \frac{2}{27}$$

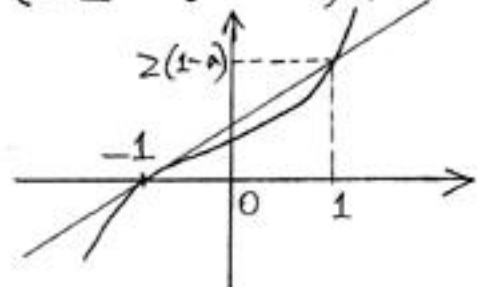
$x = \frac{-1 - \sqrt{1+3a}}{3}$ で極大値

$$\frac{2}{27}(1+3a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}a + \frac{2}{27}$$

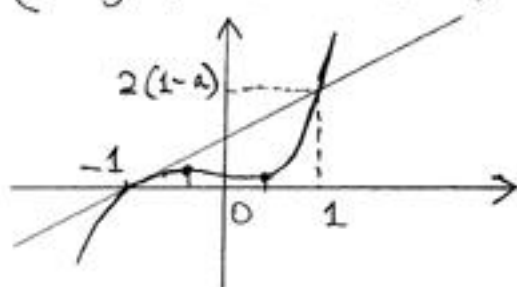
----- (答)

(4) グラフは以下のとおり

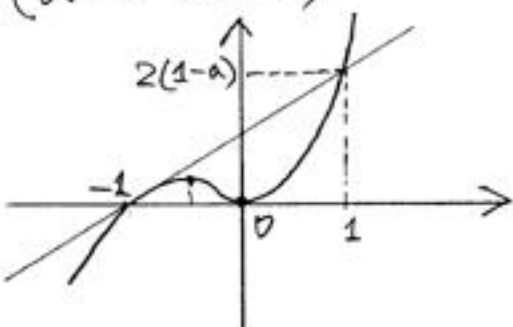
$(a \leq -\frac{1}{3} \text{ のとき})$



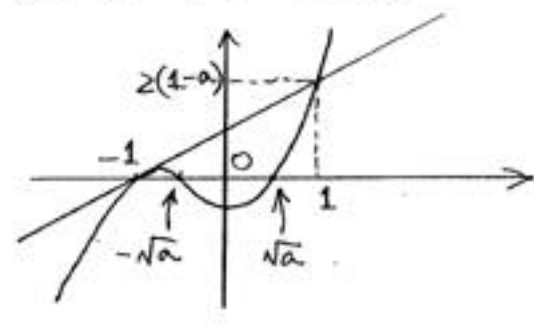
$(-\frac{1}{3} < a < 0 \text{ のとき})$



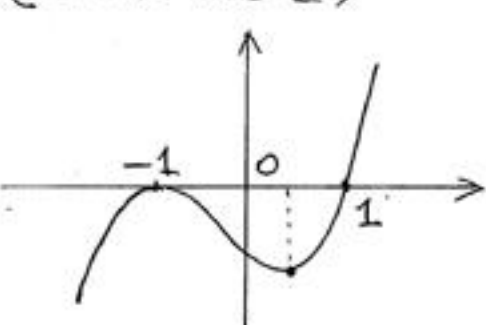
$(a = 0 \text{ のとき})$



$(0 < a < 1 \text{ のとき})$



$(a = 1 \text{ のとき})$



$(a > 1 \text{ のとき})$

