

①

(1) $a=0$ のとき $x^2+1=0$. $\therefore \alpha, \beta = \pm i$.
 $\therefore f(0)=0$ ----- (答)

$a=\frac{1}{2}$ のとき $x^2-x+1=0$ $\therefore \alpha, \beta = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$
 $\therefore f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ----- (答)

$a=1$ のとき $x^2-2x+1=0$ $\therefore \alpha=\beta=1$
 $\therefore f(1)=0$ ----- (答)

(2) α, β が実数のときは $f(a)=0$ となる. そのときは
 $a^2-1 \geq 0$ $\therefore a \leq -1, 1 \leq a$
 α, β が虚数のときは, α, β は共役複素数になる
 ので, 実軸に対称な点を表す. その場合に
 $f(a)=0$ となるのは, α, β が純虚数のときだけであ
 る. それは $a=0$ のときである.

以上をまとめると

$a \leq -1, a=0, 1 \leq a$ ----- (答)

(3) (2)より, $f(a)=0$ の場合を除いて考えると

$-1 < a < 1, a \neq 0$

としてよく, α, β は共役複素数で

$\alpha = p + qi, \beta = p - qi$

と表せる. 解と係数の関係より

$\alpha + \beta = 2a$ $\therefore 2p = 2a$ $\therefore p = a$

$\alpha\beta = 1$ $\therefore p^2 + q^2 = 1$ $\therefore q = \pm \sqrt{1-a^2}$

となる. 2のとき

$f(a) = |p||q| = |a|\sqrt{1-a^2} = \sqrt{a^2-a^4}$

$= \sqrt{-(a^2 - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}$

であるから, これは $a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最大となる.

$f(a)$ の最大値は存在し $f(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}$ ----- (答)

②

(1) 円の面積から、正六角形の面積を引いたものだから、

$$\pi \cdot 1^2 - 6 \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin 60^\circ \right) = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{-----} (\text{答})$$

(2) 小正六角形 T_2 の頂点は P_1P_3 を 3 等分する。よって
 その一辺の長さは

$$\frac{P_1P_3}{3} = \frac{2 \cos 30^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{-----} (\text{答})$$

(3) これらの正六角形は相似比 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，面積比 $\frac{1}{3}$ となる
 から， S_n は等比数列で，初項は (1) の値。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n S_k &= \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)} \\ &= \frac{3}{2} \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\} \quad \text{-----} (\text{答}) \end{aligned}$$

③

(1) $y+x=c$ を C_1 の式と連立し y を消去すると

$$x^2+a=c-x$$

$$\therefore x^2+x+a-c=0$$

$$(\text{判別式})=1-4a+4c=0$$

$$\therefore c=a-\frac{1}{4} \text{ ----- (答)}$$

(2) $y+x=c$ を C_2 の式と連立し y を消去すると

$$y^2+a=c-y$$

これは、上の場合と同じ判別式をもつので、

判別式は0となり、 C_2 とも接する。

(3) C_1 には y 軸と平行な接線は存在し、 C_2 には x 軸と平行な接線はないから、共通接線の式を

$$y=px+q \quad (p \neq 0)$$

とおくことができる。これの $p=-1$ の場合が (1) に求めたものである。何故なら、(1) より、それは1本しかない。

C_1 と連立し y を消去すると

$$x^2+a=px+q$$

$$\therefore x^2-px+a-q=0$$

$$(\text{判別式})=p^2-4a+4q=0 \text{ ----- ①}$$

C_2 と連立し x を消去すると

$$y^2+a=\frac{1}{p}y-\frac{q}{p}$$

$$\therefore py^2-y+pa+q=0$$

$$(\text{判別式})=1-4p(pa+q)=0$$

$$\therefore 4ap^2-1+4pq=0 \text{ ----- ②}$$

①, ② から q を消去すると

$$p^3-4ap^2-4ap+1=0$$

$$\therefore (p+1)(p^2-(4a+1)p+1)=0 \text{ ----- ③}$$

この方程式の、 $p=-1$ 以外の実数解の個数が求める本数になる。③の $p=-1$ 以外の解は、

$$p^2-(4a+1)p+1=0 \text{ ----- ④}$$

の解である。④が実数解をもつ条件は

$$(\text{判別式})=(4a+1)^2-4 \geq 0$$

$$\therefore (4a+3)(4a-1) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -\frac{3}{4}, \frac{1}{4} \leq a$$

また、④が $p=-1$ を解としてもつのは、代入して

$$1+4a+1+1=0 \quad \therefore a=-\frac{3}{4}$$

となるので、このときは③のすべての解が $p=-1$ になる。

以上をまとめると、求める本数は

$$\left. \begin{array}{ll} a < -\frac{3}{4}, \frac{1}{4} < a & \text{のとき 2本} \\ a = -\frac{3}{4} & \text{のとき 1本} \\ -\frac{3}{4} \leq a < \frac{1}{4} & \text{のとき 0本} \end{array} \right\} \text{ ----- (答)}$$

(4) 上の $p=-1$ の接線しかもたない場合であり

$$-\frac{3}{4} \leq a < \frac{1}{4} \text{ ----- (答)}$$