

1.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad I(0) &= \frac{(-1)^0}{1} {}_0C_0 = 1, \quad I(1) = \frac{(-1)^0}{1} {}_1C_0 + \frac{(-1)^1}{3} {}_1C_1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \\
 I(2) &= \frac{(-1)^0}{1} {}_2C_0 + \frac{(-1)^1}{3} {}_2C_1 + \frac{(-1)^2}{5} {}_2C_2 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}, \\
 I(3) &= \frac{(-1)^0}{1} {}_3C_0 + \frac{(-1)^1}{3} {}_3C_1 + \frac{(-1)^2}{5} {}_3C_2 + \frac{(-1)^3}{7} {}_3C_3 \\
 &= 1 - 1 + \frac{3}{5} - \frac{1}{7} = \frac{16}{35}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \int_0^1 (1-y^2)^n dy &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n {}_nC_k (-y^2)^k dy \\
 &= \sum_{k=0}^n \left\{ (-1)^k {}_nC_k \int_0^1 y^{2k} dy \right\} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} {}_nC_k = I(n) \\
 \left(\because \int_0^1 y^{2k} dy &= \left[\frac{1}{2k+1} y^{2k+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2k+1} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \int_0^1 (1-y^2)^n dy &\text{ へ } y = \sin x \text{ と変換すれば, } 0 \leq y \leq 1 \iff 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\
 dy &= \cos x dx \text{ である.} \\
 \int_0^1 (1-y^2)^n dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)^n \cos x dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x)^n \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n+1} dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \frac{d}{dx} \{ (\cos x)^{2n} \sin x \} \\
 &= 2n (\cos x)^{2n-1} (-\sin x) \sin x + (\cos x)^{2n} \cos x \\
 &= 2n (\cos x)^{2n-1} (\cos^2 x - 1) + (\cos x)^{2n+1} \\
 &= (2n+1) (\cos x)^{2n+1} - 2n (\cos x)^{2n-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ ならば } 0 \leq \cos x \leq 1 \text{ である. 任意の } n \geq 1 \text{ に対して} \\
 0 \leq (\cos x)^{2n+1} \leq (\cos x)^{2n-1} \leq 1 \text{ である.} \\
 x=0 \text{ かつ } x=\frac{\pi}{2} \text{ である.} \\
 0 < I(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n+1} dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n-1} dx = I(n-1) \\
 \text{である.}
 \end{aligned}$$

よって, (4) を用いると

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ (2n+1) (\cos x)^{2n+1} - 2n (\cos x)^{2n-1} \} dx \\
 &= (2n+1) \times I(n) - 2n \times I(n-1) \\
 &= \left[(\cos x)^{2n} \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0
 \end{aligned}$$

$$\iff \frac{I(n)}{I(n-1)} = \frac{2n}{2n+1}$$

よって, $n \rightarrow \infty$ とすれば右辺 $\rightarrow 1$ である. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I(n)}{I(n-1)} = 1$ である.

2 (1) $f'(x) = a^x \cdot \log a$ であり、点 (t, a^t) に接する接線は

$$y = a^t \cdot \log a (x - t) + a^t$$

$$= a^t \cdot \log a \cdot x + a^t (1 - t \log a)$$

⇔ $y = x$ と一致するときは

$$a^t \cdot \log a = 1, a^t (1 - t \log a) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^t \cdot \log a = 1, 1 - \log a^t = 0$$

$$\Leftrightarrow \log a = \frac{1}{e}, a^t = e$$

$$\Leftrightarrow \underline{a = e^{\frac{1}{e}}}, t = \log_a e = \frac{1}{\log a} = e$$

接点は (e, e) である。

(2) 求める面積は、 $a^e = e, \log a = \frac{1}{e}$ より

$$\int_0^e (a^x - x) dx = \left[\frac{a^x}{\log a} - \frac{x^2}{2} \right]_0^e$$

$$= \frac{a^e}{\log a} - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{\log a} = e^2 - \frac{e^2}{2} - e$$

$$= \underline{\underline{\frac{e^2}{2} - e}}$$

(3) $a > 1$ のとき、 $y' = a^x \cdot \log a \Rightarrow y'' = a^x (\log a)^2 > 0$ より $y = a^x$ は下に凸であり、 $y = a^x$ の接線と $y = x$ が 1 点または 2 点で交わることに注意する。

y 切片 $> 0 \Rightarrow y = x$ とは異なる点をもたない (右図)

y 切片 $= 0 \Rightarrow y = x$ と一点で交わる (1)

y 切片 $< 0 \Rightarrow y = x$ と 2 点で交わる

よって、2 点で交わるとき a は

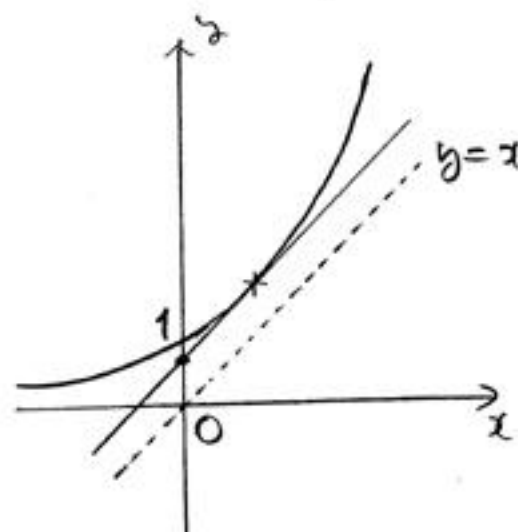
$$a^t \log a = 1, a^t (1 - t \log a) < 0$$

$$\Rightarrow a^t - t \times a^t \log a = a^t - t < 0 \quad (\because a^t \log a = 1)$$

$$\Rightarrow a^t = \frac{1}{\log a} < t = \log_a \left(\frac{1}{\log a} \right) = -\log_a (\log a)$$

$$\Rightarrow \log a \times \log_a (\log a) = \log (\log a) < -1 = \log \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow 0 < \log a < \frac{1}{e} = \log e^{\frac{1}{e}} \Rightarrow \underline{\underline{1 < a < e^{\frac{1}{e}}}} \quad (\because a > 1 \Rightarrow \log a > 0)$$



3

- (1) P によらず, $\triangle PAB$ の面積は $\frac{1}{2} \times \overline{PA} \times \overline{PB} \times \sin \theta$ であり、 $\sin \theta$ の値は固定されているから、 $\overline{PA} \times \overline{PB}$ が最大になるときの面積が最大になるときの状況は一致する。すなわち、 P が優弧 AB (長い方の弧) 上にあり、 $\overline{PA} = \overline{PB}$ (=等辺) になるときであり、その最大値は

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\sin \theta} \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PH} \right) \cdots \cdots H \text{ は } P \text{ から } AB \text{ への垂線の足} \\ &= \frac{2}{\sin \theta} \times \frac{\overline{AB}}{2} \times \overline{PH} = \frac{2}{\sin \theta} \times \overline{AH} \times (1 + \cos \theta) \\ &= \frac{2}{\sin \theta} \times \sin \theta (1 + \cos \theta) = \underline{2(1 + \cos \theta)} \end{aligned}$$

- (2) $\angle PAB = \varphi$ とおくと $\angle PBA = \pi - (\theta + \varphi)$ であり、正弦定理より

$$\begin{cases} \overline{PA} = 2 \sin \{ \pi - (\theta + \varphi) \} = 2 \sin (\theta + \varphi) \\ \overline{PB} = 2 \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overline{PA} + \overline{PB} &= 2 \{ \sin (\theta + \varphi) + \sin \varphi \} \\ &= 4 \sin \left(\frac{\theta}{2} + \varphi \right) \cos \frac{\theta}{2} \quad (\text{和積公式}) \end{aligned}$$

明らかに、 $0 < \frac{\theta}{2} + \varphi < \pi$ であり、 $\frac{\theta}{2} + \varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ のときにこれは最大となる。 $\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \Rightarrow \angle PBA = \pi - \theta - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ であり、このとき P は (1) と同じく、優弧 AB 上にあり、 $\overline{PA} = \overline{PB}$ のとき である。

〔注〕 (1) と (2) より;

$$\begin{aligned} \overline{PA} \times \overline{PB} &= 2 \sin (\theta + \varphi) \times 2 \sin \varphi = 4 \sin (\theta + \varphi) \sin \varphi \\ &= 2 \{ \cos \theta - \cos (\theta + 2\varphi) \} \quad (\text{積和公式}) \end{aligned}$$

これは、 $\theta + 2\varphi = \pi \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ のときに最大値 $2(\cos \theta + 1)$ と、処理することもできる。

- (3) $\frac{\overline{PA} \times \overline{PB}}{\overline{PA} + \overline{PB}} = \left(\frac{1}{\overline{PA}} + \frac{1}{\overline{PB}} \right)^{-1}$ であり、 $\frac{1}{\overline{PA}} + \frac{1}{\overline{PB}}$ の最小値を調べればよく、 $\frac{1}{\overline{PA}} + \frac{1}{\overline{PB}} \geq \frac{2}{\sqrt{\overline{PA} \times \overline{PB}}}$ (相対・相乗平均の不等式) が成立し、等号が成立は $\overline{PA} = \overline{PB}$ のときであり、(1) でこのとき $\overline{PA} \times \overline{PB}$ が最大であるから、

$$\begin{aligned} \frac{\overline{PA} \times \overline{PB}}{\overline{PA} + \overline{PB}} &\leq \frac{\sqrt{\overline{PA} \times \overline{PB}}}{2} = \frac{\sqrt{2(1 + \cos \theta)}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{4 \cos^2 \frac{\theta}{2}}}{2} = \frac{2 \cos \frac{\theta}{2}}{2} = \underline{\cos \frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

④

(1) S, A, B における道を選択する確率を考えると

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \quad \dots\dots\dots (\text{答})$$

(2) S, A, B を含む閉路を何度か回わる間だけ G には行かず、A や B をくり返し通過する。

右回りのとき、A を通過するのは、1, 5, 9, ... 分後。

左回りのとき、A を通過するのは、3, 7, 11, ... 分後。

したがって

$$\left. \begin{aligned} A(1) &= \frac{1}{2}, A(2) = 0, \\ A(3) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, A(4) = 0, \\ A(5) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}, A(6) = 0, \\ A(7) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16} \end{aligned} \right\} \dots\dots (\text{答})$$

(3) $n = 4k + 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) のときは

$$A(n) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \right)^k = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{n-1}{4}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n+1}{2}}$$

$n = 4k + 3$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) のときは

$$A(n) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} \right)^k = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{n-3}{4}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n+1}{2}}$$

その他のときは $A(n) = 0$ 。まとめると

$$\left. \begin{aligned} n \text{ が奇数のとき } A(n) &= \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n+1}{2}} \\ n \text{ が偶数のとき } A(n) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (\text{答})$$

(4) (2) と同様に考えると、右回りのときも、左回りのときも、B を通過するのは、2, 6, 10, ... 分後。

したがって

$$\left. \begin{aligned} B(1) &= 0, B(2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \\ B(3) &= B(4) = B(5) = 0 \\ B(6) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16}, B(7) = 0 \end{aligned} \right\} (\text{答})$$

(5) $n = 4k + 2$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) のときは

$$B(n) = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4} \right)^k = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{n-2}{4}} = 3 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n+2}{2}}$$

その他のときは $B(n) = 0$ 。まとめると

$$\left. \begin{aligned} n \text{ が } 4 \text{ で割ると } 2 \text{ 余るとき } B(n) &= 3 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n+2}{2}} \\ \text{それ以外の場合 } B(n) &= 0 \end{aligned} \right\} (\text{答})$$

(6) G に到達するのは、A から 2 分かけて G へ行く場合と、B から 1 分かけて G へ行く場合だから

$$G(n) = \frac{1}{2} A(n-2) + \frac{1}{2} B(n-1) \quad \dots\dots\dots (\text{答})$$

(7) $n = 4k + 3$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) のときは

$n-2 = 4k+1$, $n-1 = 4k+2$ だから

$$\begin{aligned} G(n) &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{(n-2)+1}{2}} + \frac{1}{2} \times 3 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{(n-1)+2}{2}} \\ &= 5 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n+3}{2}} \end{aligned}$$

その他のときは $B(n-1) = 0$ である。

$n = 4k + 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) のときは

$$G(n) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{(n-2)+1}{2}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n+1}{2}}$$

n が偶数なら $G(n) = 0$ である。まとめると

$$\left. \begin{aligned} n \text{ が偶数のとき } G(n) &= 0 \\ n \text{ が } 4 \text{ で割ると } 1 \text{ 余るとき } G(n) &= \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n+1}{2}} \\ n \text{ が } 4 \text{ で割ると } 3 \text{ 余るとき } G(n) &= 5 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n+3}{2}} \end{aligned} \right\} (\text{答})$$