

1

$$\begin{aligned}
 (1) \quad I(0) &= \frac{(-1)^0}{1} {}_0C_0 = 1, \quad I(1) = \frac{(-1)^0}{1} {}_1C_0 + \frac{(-1)^1}{3} {}_1C_1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \\
 I(2) &= \frac{(-1)^0}{1} {}_2C_0 + \frac{(-1)^1}{3} {}_2C_1 + \frac{(-1)^2}{5} {}_2C_2 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}, \\
 I(3) &= \frac{(-1)^0}{1} {}_3C_0 + \frac{(-1)^1}{3} {}_3C_1 + \frac{(-1)^2}{5} {}_3C_2 + \frac{(-1)^3}{7} {}_3C_3 \\
 &= 1 - 1 + \frac{3}{5} - \frac{1}{7} = \frac{16}{35}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \int_0^1 (1-y^2)^n dy &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n {}_nC_k (-y^2)^k dy \\
 &= \sum_{k=0}^n \left\{ (-1)^k {}_nC_k \int_0^1 y^{2k} dy \right\} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} {}_nC_k = I(n) \\
 &\quad \left(\because \int_0^1 y^{2k} dy = \left[\frac{1}{2k+1} y^{2k+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2k+1} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \int_0^1 (1-y^2)^n dy \quad y = \sin x \text{ と変換すれば, } 0 \leq y \leq 1 \iff 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\
 dy = \cos x dx \text{ である.} \\
 \int_0^1 (1-y^2)^n dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)^n \cos x dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x)^n \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n+1} dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \frac{d}{dx} \{ (\cos x)^{2n} \sin x \} \\
 &= 2n (\cos x)^{2n-1} (-\sin x) \sin x + (\cos x)^{2n} \cos x \\
 &= 2n (\cos x)^{2n-1} (\cos^2 x - 1) + (\cos x)^{2n+1} \\
 &= (2n+1) (\cos x)^{2n+1} - 2n (\cos x)^{2n-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ において } 0 \leq \cos x \leq 1 \text{ である. 注意 } n \geq 1 \text{ ならば } \\
 0 \leq (\cos x)^{2n+1} \leq (\cos x)^{2n-1} \leq 1 \text{ である.} \\
 x=0 \text{ かつ } x=\frac{\pi}{2} \text{ である.} \\
 0 < I(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n+1} dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n-1} dx = I(n-1) \\
 \text{である.}
 \end{aligned}$$

よって, (4) を用いると

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ (2n+1) (\cos x)^{2n+1} - 2n (\cos x)^{2n-1} \} dx \\
 &= (2n+1) \times I(n) - 2n \times I(n-1) \\
 &= \left[(\cos x)^{2n} \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 \\
 \iff \frac{I(n)}{I(n-1)} &= \frac{2n}{2n+1}
 \end{aligned}$$

を得る. $n \rightarrow \infty$ とすれば右辺 $\rightarrow 1$ である. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I(n)}{I(n-1)} = 1$ である.

2 (1) $f'(x) = a^x \cdot \log a$ であり、点 (t, a^t) に接する接線は

$$y = a^t \cdot \log a (x - t) + a^t$$

$$= a^t \cdot \log a \cdot x + a^t (1 - t \log a)$$

この $y = x$ と一致するときは

$$a^t \cdot \log a = 1, a^t (1 - t \log a) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^t \cdot \log a = 1, 1 - \log a^t = 0$$

$$\Leftrightarrow \log a = \frac{1}{e}, a^t = e$$

$$\Leftrightarrow \underline{a = e^{\frac{1}{e}}}, t = \log_a e = \frac{1}{\log a} = e$$

接点は (e, e) である。

(2) 求める面積は、 $a^e = e, \log a = \frac{1}{e}$ より

$$\int_0^e (a^x - x) dx = \left[\frac{a^x}{\log a} - \frac{x^2}{2} \right]_0^e$$

$$= \frac{a^e}{\log a} - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{\log a} = e^2 - \frac{e^2}{2} - e$$

$$= \underline{\underline{\frac{e^2}{2} - e}}$$

(3) $a > 1$ のとき、 $y' = a^x \cdot \log a \Rightarrow y'' = a^x (\log a)^2 > 0$ より $y = a^x$ は下に凸であり、 $y = a^x$ の接線と $y = x$ との交点の注目に注意する。

$$\left\{ \begin{array}{l} y \text{切片} > 0 \Rightarrow y = x \text{ と } y = a^x \text{ は交点をもたない} \\ \text{(右図)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y \text{切片} = 0 \Rightarrow y = x \text{ と } y = a^x \text{ は一点で交わる} \\ \text{(1)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y \text{切片} < 0 \Rightarrow y = x \text{ と } y = a^x \text{ は2点で交わる} \end{array} \right.$$

わかる。よって、2点で交わるとき a は

$$a^t \log a = 1, a^t (1 - t \log a) < 0$$

$$\Rightarrow a^t - t \times a^t \log a = a^t - t < 0 \quad (\because a^t \log a = 1)$$

$$\Rightarrow a^t = \frac{1}{\log a} < t = \log_a \left(\frac{1}{\log a} \right) = -\log_a (\log a)$$

$$\Rightarrow \log a \times \log_a (\log a) = \log (\log a) < -1 = \log \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow 0 < \log a < \frac{1}{e} = \log e^{\frac{1}{e}} \Rightarrow \underline{\underline{1 < a < e^{\frac{1}{e}}}} \quad (\because a > 1 \Rightarrow \log a > 0)$$

