

①

(1) $a=0$ のとき $x^2+1=0 \therefore \alpha, \beta = \pm i$
 $\therefore S(0)=0$ ----- (答)

$a=\frac{1}{2}$ のとき $x^2-x+1=0 \therefore \alpha, \beta = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$
 $\therefore S(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ----- (答)

$a=1$ のとき $x^2-2x+1=0 \therefore \alpha=\beta=1$
 $\therefore S(1)=0$ ----- (答)

(2) α, β が実数のときは $S(a)=0$ となる。そのときは
 $a^2-1 \geq 0 \therefore a \leq -1, 1 \leq a$

α, β が虚数のときは、 α, β は共役複素数になる
 ので、実数軸に対称な点を表す。その場合に
 $S(a)=0$ となるのは、 α, β が純虚数のときだけ
 ある。それは $a=0$ のときである。

以上をまとめると

$a \leq -1, a=0, 1 \leq a$ ----- (答)

(3) (2)より、 $S(a)=0$ の場合を除いて考えると
 $-1 < a < 1, a \neq 0$

としてよく、 α, β は共役複素数で

$\alpha = p + qi, \beta = p - qi$

と表せる。角と偏角の関係より

$\alpha + \beta = 2a \therefore 2p = 2a \therefore p = a$

$\alpha\beta = 1 \therefore p^2 + q^2 = 1 \therefore q = \pm \sqrt{1-a^2}$

となる。このとき

$$S(a) = |p||q| = |a|\sqrt{1-a^2} = \sqrt{a^2-a^4}$$

$$= \sqrt{-(a^2 - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}$$

であるから、これは $a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最大となる。

$S(a)$ の最大値は存在し $S(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}$ ----- (答)

②

(1) 円の面積から、正六角形の面積を引いたものだから、
 $\pi \cdot 1^2 - 6 \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin 60^\circ \right) = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ----- (答)

(2) 小正六角形 T_2 の頂点は P_1P_3 を 3 等分する。よって
 その一辺の長さは

$$\frac{P_1P_3}{3} = \frac{2 \cos 30^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ----- (答)}$$

(3) これらの正六角形は相似比 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，面積比 $\frac{1}{3}$ となる
 から， S_n は等比数列で，初項は (1) の値。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n S_k &= \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) \frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n}{1 - \left(\frac{1}{3} \right)} \\ &= \frac{3}{2} \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\} \text{ ----- (答)} \end{aligned}$$

3

$$(1) f'(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x) \quad \text{-----} \left(\frac{4}{8}\right)$$

$$g'(x) = -e^{-x}(\cos x + \sin x) \quad \text{-----} \left(\frac{4}{8}\right)$$

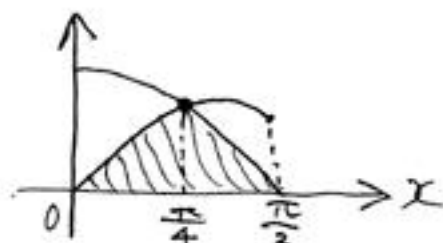
$$(2) f(x) = -\frac{1}{2} \{f'(x) + g'(x)\} \quad \text{-----} \left(\frac{4}{8}\right)$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \{f'(x) - g'(x)\} \quad \text{-----} \left(\frac{4}{8}\right)$$

$$(3) f(x) = g(x) \text{ と } x < \frac{\pi}{2}$$

$$\sin x = \cos x$$

$$\text{区間 } [0, \frac{\pi}{2}] \text{ には } x = \frac{\pi}{4}$$



面積は, (2) を利用して

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx$$

$$= -\frac{1}{2} [f(x) + g(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} [f(x) - g(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2} [e^{-x}(\sin x + \cos x)]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} [e^{-x}(\sin x - \cos x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-\frac{\pi}{4}} \sqrt{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi}{2}} - 0$$

$$= \frac{1}{2} (1 - \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}} + e^{-\frac{\pi}{2}}) \quad \text{-----} \left(\frac{4}{8}\right)$$