

平成 16 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

試験開始の合図があるまでは、この冊子を開いてはいけない。

1. この冊子の本文は 3 ページである。印刷の不鮮明な部分、ページの脱落などがあつた場合は申し出ること。
2. 答案用紙には、すべてに受験番号と氏名を記入すること。

記入例

受験 番号	文	1	2	3	4	(氏 名)
----------	---	---	---	---	---	-------

3. この冊子の余白部分は下書きに使用してもよい。
4. この冊子及び下書き用紙は持ち帰ること。

数 学 問 題

解答は、それぞれ問題の番号に対応する答案用紙に書くこと。この指示に従わない答案は無効とする。

1 a を実数とする。二次方程式

$$x^2 - 2ax + 1 = 0$$

の2つの解を α, β として、3つの複素数 $0, \alpha, \beta$ の表す複素数平面の3点 O, A, B を頂点とする三角形の面積を $S(a)$ とする。ただし、 O, A, B が一直線上にあるときは $S(a) = 0$ とする。

(1) $S(0), S(-\frac{1}{2}), S(1)$ を求めよ。

(2) $S(a) = 0$ となるための a の条件を求めよ。

(3) a が実数全体を動くとき、 $S(a)$ の最大値が存在すればそれを求めよ。

2 原点を中心として半径1の円 C_1 がある. 円 C_1 の円周上に正六角形 T_1 の頂点を取り, それらを反時計まわりで $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ とする.

(1) 円 C_1 の周と正六角形 T_1 の周で囲まれた図形の面積を求めよ.

(2) 正六角形 T_1 の頂点をひとつおきに P_1 と P_3, P_2 と P_4, P_3 と P_5, P_4 と P_6, P_5 と P_1, P_6 と P_2 を結ぶと, 小正六角形 T_2 が得られる. 正六角形 T_2 の一辺の長さを求めよ.

(3) 正六角形 T_2 の外接円を C_2 とする. (2)と同様にして, 正六角形 T_2 の頂点をひとつおきに結んで得られる小正六角形を T_3 とする. この操作を続けて, 原点を中心とする円 C_k とその周上に頂点を持つ正六角形 T_k が得られる. 円 C_k の周と正六角形 T_k の周で囲まれた図形の面積を S_k とする. このとき, $\sum_{k=1}^n S_k$ を求めよ. ただし, n は3以上の自然数とする.

3 関数 $f(x) = x^3 + x^2 - ax - a$ を考える. ここで, a は正の実数であるものとする.

- (1) 曲線 $y = f(x)$ とその上の点 $P(-1, f(-1))$ における接線との共有点のうち接点 P 以外のものを求めよ.
- (2) $f(x) = 0$ の実数解の個数を a に応じて求めよ.
- (3) $f(x)$ の極値を求めよ.
- (4) 曲線 $y = f(x)$ の概形を(1), (2), (3)で求めたことを利用して描け.