

平成 16 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学 共 通

(数学科, 物理学科, 生物学科, 情報科学科用)

注 意 事 項

試験開始の合図があるまでは, この冊子を開いてはいけない。

1. この冊子の本文は 3 ページである。印刷の不鮮明な部分, ページの脱落などがあつた場合は申し出ること。
2. 答案用紙には, すべてに受験番号と氏名を記入すること。

記入例

受験 番号	理	1	2	3	4	(氏 名)
----------	---	---	---	---	---	-------

3. この冊子の余白部分は下書きに使用してもよい。
4. この冊子及び下書き用紙は持ち帰ること。

数 学 共 通

解答は、それぞれ問題の番号に対応する答案用紙に書くこと。この指示に従わない答案は無効とする。

1 a を実数とする。二次方程式

$$x^2 - 2ax + 1 = 0$$

の2つの解を α, β として、3つの複素数 $0, \alpha, \beta$ の表す複素数平面の3点 O, A, B を頂点とする三角形の面積を $S(a)$ とする。ただし、 O, A, B が一直線上にあるときは $S(a) = 0$ とする。

- (1) $S(0), S(\frac{1}{2}), S(1)$ を求めよ。
- (2) $S(a) = 0$ となるための a の条件を求めよ。
- (3) a が実数全体を動くとき、 $S(a)$ の最大値が存在すればそれを求めよ。

2 原点を中心として半径1の円 C_1 がある. 円 C_1 の円周上に正六角形 T_1 の頂点を取り, それらを反時計まわりで $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ とする.

(1) 円 C_1 の周と正六角形 T_1 の周で囲まれた図形の面積を求めよ.

(2) 正六角形 T_1 の頂点をひとつおきに P_1 と P_3, P_2 と P_4, P_3 と P_5, P_4 と P_6, P_5 と P_1, P_6 と P_2 を結ぶと, 小正六角形 T_2 が得られる. 正六角形 T_2 の一辺の長さを求めよ.

(3) 正六角形 T_2 の外接円を C_2 とする. (2)と同様にして, 正六角形 T_2 の頂点をひとつおきに結んで得られる小正六角形を T_3 とする. この操作を続けて, 原点を中心とする円 C_k とその周上に頂点を持つ正六角形 T_k が得られる. 円 C_k の周と正六角形 T_k の周で囲まれた図形の面積を S_k とする. このとき, $\sum_{k=1}^n S_k$ を求めよ. ただし, n は3以上の自然数とする.

3 xy 平面の 2 つの曲線

$$C_1: y = x^2 + a$$

$$C_2: x = y^2 + a$$

を考える.

- (1) 曲線 C_1 の接線として $y + x = b$ と表されるものがあることを示し, b を a で表せ. また, 接点の x 座標を求めよ.
- (2) (1)で求めた曲線 C_1 の接線は C_2 にも接していること, すなわち, 2 曲線 C_1 と C_2 との共通の接線であることを示せ.
- (3) 2 曲線 C_1 と C_2 の共通の接線として(1)で求めたもの以外に何本あるかを a に応じて求めよ.
- (4) 曲線 C_1 と曲線 C_2 がちょうど 2 つの共有点をもつための a の条件を求めよ.