

(1)

n は3で割ると1余るから、0以上の整数 ℓ を用いて $n=3\ell+1$ と表すことができる。よって

$$\begin{aligned} n^m &= (3\ell+1)^m \\ &= \sum_{k=1}^m {}^m C_k (3\ell)^k + 1 \end{aligned}$$

となり、 $\sum_{k=1}^m {}^m C_k (3\ell)^k$ は3で割りきれれるから、 n^m は3で割ると1余る。

(証明終)

(2)

n は3で割ると2余るから、自然数 ℓ を用いて $n=3\ell-1$ と表すことができる。よって

$$\begin{aligned} n^m &= (3\ell-1)^m \\ &= \sum_{k=1}^m {}^m C_k (-1)^{m-k} (3\ell)^k + (-1)^m \end{aligned}$$

となり、 $\sum_{k=1}^m {}^m C_k (-1)^{m-k} (3\ell)^k$ は3で割りきれれるから、 n^m は3で割ると $(-1)^m$ 余る。ここで m が

奇数の時、 $(-1)^m = -1$ であるから、 n^m は3で割ると2余る。

(証明終)

(3)

n が3で割りきれるとき、 n^m も3で割りきれる。また、(1)で示した通り n が3で割ると1余るとき、 n^m も3で割ると1余る。よって n が3で割ると2余る自然数でないとき、 n^m は3で割ると2余る自然数ではない。この命題の対偶を取ることにより、 n^m が3で割ると2余るとき、 n も3で割ると2余る。よって題意は示された。

(証明終)

(1)

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ (x-\alpha)^2 - (\beta-\alpha)(x-\alpha) \right\} dx \\
 &= \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3 - \frac{1}{2}(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2 \right]_{\alpha}^{\beta} \\
 &= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 - \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3 \\
 &= -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3
 \end{aligned}$$

となるから、題意は示された。

(証明終)

(2)

P と Q が共有点を持つとき、方程式

$$\begin{aligned}
 (x-p)^2 + q &= -x^2 + 2x + 4 \\
 \Leftrightarrow 2x^2 - 2(p+1)x + p^2 + q - 4 &= 0
 \end{aligned}$$

が実数解をもつから、判別式が 0 以上となる。よって

$$\begin{aligned}
 (p+1)^2 - 2(p^2 + q - 4) &\geq 0 \\
 \Leftrightarrow -p^2 + 2p - 2q + 9 &\geq 0
 \end{aligned}$$

となる。ここで点 (p, q) は直線 $y = -2x + 1$ 上にあり、 $q = -2p + 1$ を満たすから、これを上式に代入して整理することにより

$$\begin{aligned}
 -p^2 + 2p - 2(-2p + 1) + 9 &\geq 0 \\
 \Leftrightarrow p^2 - 6p - 7 &\leq 0 \\
 \Leftrightarrow (p-7)(p+1) &\leq 0 \\
 \therefore -1 \leq p \leq 7
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $-1 \leq p \leq 7$

(3)

(2)より方程式

$$(x-p)^2 + q = -x^2 + 2x + 4$$

の解は、

$$x = \frac{(p+1) \pm \sqrt{-p^2 + 6p + 7}}{2}$$

と表される。これらを α, β ($\beta > \alpha$) とおけば、(1)より P と Q の囲む面積は

$$\begin{aligned}
 &\int_{\alpha}^{\beta} \left\{ (-x^2 + 2x + 4) - ((x-p)^2 + q) \right\} dx \\
 &= -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x-\beta)(x-\alpha) dx \\
 &= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 \\
 &= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{(p+1) + \sqrt{-p^2 + 6p + 7}}{2} \right) - \left(\frac{(p+1) - \sqrt{-p^2 + 6p + 7}}{2} \right) \right\}^3 \\
 &= \frac{(\sqrt{-p^2 + 6p + 7})^3}{3} \\
 &= \frac{(\sqrt{-(p-3)^2 + 16})^3}{3}
 \end{aligned}$$

となる。よって(2)より、 $p = 3$ のとき面積は最大値

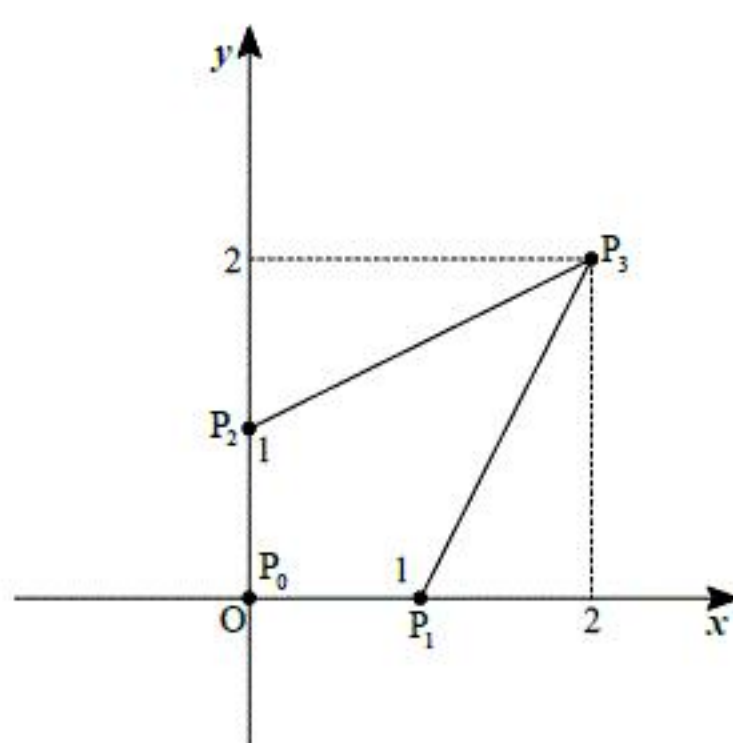
$$\frac{(\sqrt{16})^3}{3} = \frac{64}{3}$$

を取る。

(答) $\frac{64}{3} (p = 3)$

3

(1)



仮定より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_0P_3} &= 2(\overrightarrow{P_0P_2} + \overrightarrow{P_0P_1}) \\ &= 2\{(0, 1) + (1, 0)\} \\ &= (2, 2)\end{aligned}$$

$$\therefore \overrightarrow{OP_3} = (2, 2)$$

となる。よって $f(3)$ は三点 $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(2, 2)$ が作る三角形の面積であるから、二つのベクトル $(2, 1)$, $(1, 2)$ が張る三角形の面積である。よって

$$\begin{aligned}f(3) &= \frac{1}{2}|2 \cdot 2 - 1 \cdot 1| \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(3) = \frac{3}{2}$$

(2)

$\triangle P_{k-2}P_{k-1}P_k$ と $\triangle P_{k-1}P_kP_{k+1}$ は辺 $P_{k-1}P_k$ を共有する三角形である。ここで辺 $P_{k-1}P_k$ の中点を M_k とおけば

$$\overrightarrow{P_{k-2}M_k} = \frac{\overrightarrow{P_{k-2}P_{k-1}} + \overrightarrow{P_{k-2}P_k}}{2}$$

となるから、仮定より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_{k-2}P_{k+1}} &= 2(\overrightarrow{P_{k-2}P_k} + \overrightarrow{P_{k-2}P_{k-1}}) \\ &= 4\overrightarrow{P_{k-2}M_k}\end{aligned}$$

となる。よって M_k は線分 $P_{k-2}P_{k+1}$ を $1:3$ に内分する点である。よって $\triangle P_{k-2}P_{k-1}P_k$ について底辺を $P_{k-1}P_k$ としたときの高さを h_k とおけば、 $\triangle P_{k-1}P_kP_{k+1}$ について底辺を $P_{k-1}P_k$ としたときの高さは $3h_k$ となるから

$$\begin{aligned}\frac{f(k+1)}{f(k)} &= \frac{\frac{1}{2}P_{k-1}P_k \cdot 3h_k}{\frac{1}{2}P_{k-1}P_k \cdot h_k} \\ &= 3\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{f(k+1)}{f(k)} = 3$$

(3)

(1)と(2)より

$$\begin{aligned}f(2) &= \frac{1}{3}f(3) \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。また(2)より $n \geq 3$ のとき

$$\begin{aligned}f(n) &= 3f(n-1) \\ &= 3^{n-2}f(2) \\ &= \frac{3^{n-2}}{2}\end{aligned}$$

となり、これは $n=2$ のときも成り立つ。よって

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^n f(k) &= \sum_{k=2}^n \frac{3^{k-2}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} \\ &= \frac{3^{n-1} - 1}{4}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sum_{k=2}^n f(k) = \frac{3^{n-1} - 1}{4}$$