

(1)

n は3で割ると1余るから、0以上の整数 ℓ を用いて $n=3\ell+1$ と表すことができる。よって

$$\begin{aligned} n^m &= (3\ell+1)^m \\ &= \sum_{k=1}^m {}_m C_k (3\ell)^k + 1 \end{aligned}$$

となり、 $\sum_{k=1}^m {}_m C_k (3\ell)^k$ は3で割りきれれるから、 n^m は3で割ると1余る。

(証明終)

(2)

n は3で割ると2余るから、自然数 ℓ を用いて $n=3\ell-1$ と表すことができる。よって

$$\begin{aligned} n^m &= (3\ell-1)^m \\ &= \sum_{k=1}^m {}_m C_k (-1)^{m-k} (3\ell)^k + (-1)^m \end{aligned}$$

となり、 $\sum_{k=1}^m {}_m C_k (-1)^{m-k} (3\ell)^k$ は3で割りきれれるから、 n^m は3で割ると $(-1)^m$ 余る。ここで m が

奇数の時、 $(-1)^m = -1$ であるから、 n^m は3で割ると2余る。

(証明終)

(3)

n が3で割りきれるとき、 n^m も3で割りきれる。また、(1)で示した通り n が3で割ると1余るとき、 n^m も3で割ると1余る。よって n が3で割ると2余る自然数でないとき、 n^m は3で割ると2余る自然数ではない。この命題の対偶を取ることにより、 n^m が3で割ると2余るとき、 n も3で割ると2余る。よって題意は示された。

(証明終)

(1)

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx &= \int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\alpha)^2 - (\beta-\alpha)(x-\alpha)\}dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3 - \frac{1}{2}(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 - \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3 \\ &= -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

となるから、題意は示された。

(証明終)

(2)

P と Q が共有点を持つとき、方程式

$$\begin{aligned}(x-p)^2 + q &= -x^2 + 2x + 4 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 2(p+1)x + p^2 + q - 4 &= 0\end{aligned}$$

が実数解をもつから、判別式が0以上となる。よって

$$(p+1)^2 - 2(p^2 + q - 4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -p^2 + 2p - 2q + 9 \geq 0$$

となる。ここで点 (p, q) は直線 $y = -2x + 1$ 上にあり、 $q = -2p + 1$ を満たすから、これを上式に代入して整理することにより

$$-p^2 + 2p - 2(-2p + 1) + 9 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 6p - 7 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (p-7)(p+1) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq p \leq 7$$

となる。

(答) $-1 \leq p \leq 7$

(3)

(2)より方程式

$$(x-p)^2 + q = -x^2 + 2x + 4$$

の解は、

$$x = \frac{(p+1) \pm \sqrt{-p^2 + 6p + 7}}{2}$$

と表される。これらを α, β ($\beta > \alpha$) とおけば、(1)より P と Q の囲む面積は

$$\begin{aligned}&\int_{\alpha}^{\beta}\{(-x^2 + 2x + 4) - ((x-p)^2 + q)\}dx \\ &= -2\int_{\alpha}^{\beta}(x-\beta)(x-\alpha)dx \\ &= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 \\ &= \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{(p+1) + \sqrt{-p^2 + 6p + 7}}{2}\right) - \left(\frac{(p+1) - \sqrt{-p^2 + 6p + 7}}{2}\right)\right\}^3 \\ &= \frac{(\sqrt{-p^2 + 6p + 7})^3}{3} \\ &= \frac{(\sqrt{-(p-3)^2 + 16})^3}{3}\end{aligned}$$

となる。よって(2)より、 $p = 3$ のとき面積は最大値

$$\frac{(\sqrt{16})^3}{3} = \frac{64}{3}$$

を取る。

(答) $\frac{64}{3} (p=3)$

(1)

$y = f(x)$ の点 $(\alpha, f(\alpha))$ における接線の方程式は

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x \\ f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 \end{cases}$$

より,

$$\begin{aligned} g(x) &= f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha) \\ &= (3\alpha^2 - 6\alpha + 2)x - 2\alpha^3 + 3\alpha^2 \end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x^3 - 3x^2 + 2x - \{(3\alpha^2 - 6\alpha + 2)x - 2\alpha^3 + 3\alpha^2\} \\ &= x^3 - 3x^2 - (3\alpha^2 - 6\alpha)x + 2\alpha^3 - 3\alpha^2 \\ &= (x - \alpha)^2(x + 2\alpha - 3) \end{aligned}$$

と因数分解できる。したがって、 $f(x) - g(x) = 0$ は重解 $x = \alpha$ をもつことが示された。

(証明終)

(2)(i)

(1)より

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \alpha, -2\alpha + 3 \end{aligned}$$

となる。よって

$$x_n = -2x_{n-1} + 3$$

となる。

(答) $x_n = -2x_{n-1} + 3$

(ii)

(i)より $n \geq 2$ において

$$\begin{aligned} x_n &= -2x_{n-1} + 3 \\ \Leftrightarrow x_n - 1 &= -2(x_{n-1} - 1) \\ &= (-2)^{n-1}(x_1 - 1) \\ &= -(-2)^{n-1} (\because x_1 = 0) \end{aligned}$$

$$\therefore x_n = \frac{(-2)^n}{2} + 1$$

となる。これは $n = 1$ でもなりたつ。

(答) $x_n = \frac{(-2)^n}{2} + 1$