

(1)

$n$  は3で割ると1余るから、0以上の整数 $\ell$ を用いて $n=3\ell+1$ と表すことができる。よって

$$\begin{aligned} n^m &= (3\ell+1)^m \\ &= \sum_{k=1}^m {}^m C_k (3\ell)^k + 1 \end{aligned}$$

となり、 $\sum_{k=1}^m {}^m C_k (3\ell)^k$  は3で割りきれれるから、 $n^m$  は3で割ると1余る。

(証明終)

(2)

$n$  は3で割ると2余るから、自然数 $\ell$ を用いて $n=3\ell-1$ と表すことができる。よって

$$\begin{aligned} n^m &= (3\ell-1)^m \\ &= \sum_{k=1}^m {}^m C_k (-1)^{m-k} (3\ell)^k + (-1)^m \end{aligned}$$

となり、 $\sum_{k=1}^m {}^m C_k (-1)^{m-k} (3\ell)^k$  は3で割りきれれるから、 $n^m$  は3で割ると $(-1)^m$ 余る。ここで $m$ が

奇数の時、 $(-1)^m = -1$ であるから、 $n^m$  は3で割ると2余る。

(証明終)

(3)

$n$  が3で割りきれるとき、 $n^m$  も3で割りきれる。また、(1)で示した通り $n$  が3で割ると1余るとき、 $n^m$  も3で割ると1余る。よって $n$  が3で割ると2余る自然数でないとき、 $n^m$  は3で割ると2余る自然数ではない。この命題の対偶を取ることにより、 $n^m$  が3で割ると2余るとき、 $n$  も3で割ると2余る。よって題意は示された。

(証明終)

(1)

$y = f(x)$  の点  $(\alpha, f(\alpha))$  における接線の方程式は

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x \\ f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 \end{cases}$$

より,

$$\begin{aligned} g(x) &= f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha) \\ &= (3\alpha^2 - 6\alpha + 2)x - 2\alpha^3 + 3\alpha^2 \end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x^3 - 3x^2 + 2x - \{(3\alpha^2 - 6\alpha + 2)x - 2\alpha^3 + 3\alpha^2\} \\ &= x^3 - 3x^2 - (3\alpha^2 - 6\alpha)x + 2\alpha^3 - 3\alpha^2 \\ &= (x - \alpha)^2(x + 2\alpha - 3) \end{aligned}$$

と因数分解できる。したがって、 $f(x) - g(x) = 0$  は重解  $x = \alpha$  をもつことが示された。

(証明終)

(2)(i)

(1)より

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \alpha, -2\alpha + 3 \end{aligned}$$

となる。よって

$$x_n = -2x_{n-1} + 3$$

となる。

(答)  $x_n = -2x_{n-1} + 3$

(ii)

(i)より  $n \geq 2$  において

$$\begin{aligned} x_n &= -2x_{n-1} + 3 \\ \Leftrightarrow x_n - 1 &= -2(x_{n-1} - 1) \\ &= (-2)^{n-1}(x_1 - 1) \\ &= -(-2)^{n-1} (\because x_1 = 0) \end{aligned}$$

$$\therefore x_n = \frac{(-2)^n}{2} + 1$$

となる。これは  $n=1$  でもなりたつ。

(答)  $x_n = \frac{(-2)^n}{2} + 1$

3

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-a\sqrt{x}) \cdot \left(1-\frac{a}{2\sqrt{x}}\right) \\ &= (\sqrt{x}-a)(2\sqrt{x}-a) \\ &= 2x-3a\sqrt{x}+a^2 \\ f''(x) &= 2-\frac{3a}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

となる。よって  $a \leq 0$  のとき  $f'(x) \geq 0$  となり、 $f(x)$  は単調増加となるから、 $f(x)$  が極大値を取るとき  $a > 0$  となる。このとき  $f(x)$  の増減は以下のとおりである。

|          |             |             |                  |             |                    |             |       |             |
|----------|-------------|-------------|------------------|-------------|--------------------|-------------|-------|-------------|
| $x$      | 0           | ...         | $\frac{a^2}{4}$  | ...         | $\frac{9}{16}a^2$  | ...         | $a^2$ | ...         |
| $f'(x)$  | <div></div> | +           | 0                | -           | -                  | -           | 0     | +           |
| $f''(x)$ | <div></div> | -           | -                | -           | 0                  | +           | +     | +           |
| $f(x)$   | 0           | <div></div> | $\frac{a^4}{16}$ | <div></div> | $\frac{9}{256}a^4$ | <div></div> | 0     | <div></div> |

よって  $f(x)$  が  $x=1$  で極大値を取るとき、

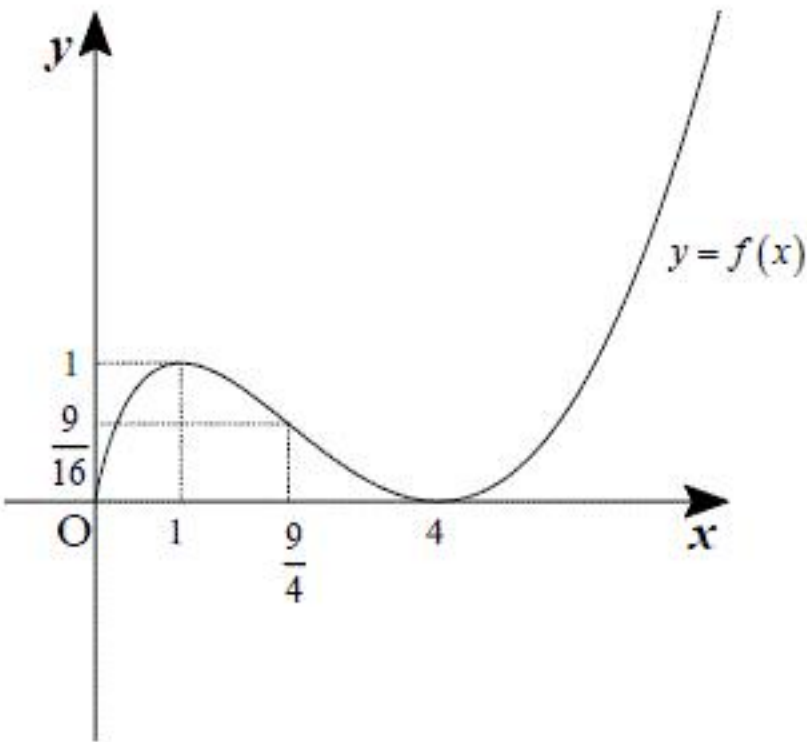
$$\begin{aligned} \frac{a^2}{4} &= 1 \\ \Leftrightarrow a &= 2 (\because a > 0) \end{aligned}$$

となる。

(答)  $a=2$

(2)

(1)の増減表より、 $y=f(x)$  のグラフは以下のとおりである。



(答) 前図

(3)

求める面積は

$$\begin{aligned} \int_0^4 (x-2\sqrt{x})^2 dx &= \int_0^4 (x^2-4x\sqrt{x}+4x) dx \\ &= \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^2 \right]_0^4 \\ &= \frac{32}{15} \end{aligned}$$

となる。

(答)  $\frac{32}{15}$