

(1)

 $x > 0$ より

$$\begin{aligned}\log\left(1+\frac{1}{x}\right) &= \log\left(\frac{x+1}{x}\right) \\ &= \log(x+1) - \log x\end{aligned}$$

となる。 $\log x$ は区間 $[x, x+1]$ において連続、微分可能であり、

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

であるから、平均値の定理より

$$\frac{\log(x+1) - \log x}{(x+1) - x} = \frac{1}{c}$$

と $x < c < x+1$ を満たす実数 c が存在する。ここから

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+1} &< \frac{1}{c} < \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} &< \log(x+1) - \log x < \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} &< \log\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}\end{aligned}$$

が示された。

(証明終)

(2)

$y = \frac{1}{x}$, $y = \log\left(1+\frac{1}{x}\right)$, $x=1$, $x=a$ で囲まれる面積 S は

$$\begin{aligned}S &= \int_1^a \left\{ \frac{1}{x} - \log\left(1+\frac{1}{x}\right) \right\} dx \\ &= [\log x]_1^a - \int_1^a \{ \log(x+1) - \log x \} dx \\ &= \log a - \left[(x+1) \{ \log(x+1) - 1 \} - x(\log x - 1) \right]_1^a \\ &= -(a+1) \log\left(1+\frac{1}{a}\right) + 2 \log 2\end{aligned}$$

となる。 $a > 1$ であるから、(1)より

$$\begin{aligned}S &< -(a+1) \frac{1}{a+1} + 2 \log 2 \\ \Rightarrow S &< 2 \log 2 - 1\end{aligned}$$

となる。よって題意は示された。

(証明終)

(1)

$A^2 = E$ の両辺の行列式をとると

$$\begin{aligned} (\det A)^2 &= 1 \\ \therefore \det A &= \pm 1 \end{aligned}$$

となる。よって逆行列 A^{-1} が存在するから、 $'AA = A^2$ の両辺に右から A^{-1} をかけることにより

$$\begin{aligned} 'A &= A \\ \therefore b &= c \end{aligned}$$

を得る。 $A^2 = E$ の両辺に A^{-1} をかけることにより

$$A = A^{-1}$$

となり、 $\det A = \pm 1$ より

$$A^{-1} = \pm \begin{pmatrix} d & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

となる。ここで $\det A = 1$ のとき $A = A^{-1}$ より

$$\begin{aligned} \begin{cases} a = d \\ b = -b \end{cases} \\ \Leftrightarrow a = d, b = 0 \end{aligned}$$

となるが、 $\det A = 1$ より

$$\begin{aligned} ad - bc &= 1 \\ \Leftrightarrow a^2 &= 1 \\ \therefore a = d &= \pm 1 \end{aligned}$$

となり、これは仮定に反する。よって $\det A = -1$ であり、このとき $A = A^{-1}$ より

$$a = -d$$

を得る。再び $\det A = -1$ より

$$\begin{aligned} ad - bc &= -1 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 &= 1 \end{aligned}$$

を得る。よって $-1 \leq a \leq 1$ であるから、 $a = \cos \theta$ とおくと

$$b = c = \pm \sin \theta, d = -\cos \theta$$

を得る。ここで、 $b = c = \sin \theta$ のとき、

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

となり、 $b = c = -\sin \theta$ のとき、 $\varphi = -\theta$ とおくと、

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ -\sin(-\varphi) & -\cos(-\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるため、ここで再び $\varphi \rightarrow \theta$ とみなすことで、

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

を得る。逆に $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ のとき、条件(*)は満たされるから、題意は示された。

(証明終)

(2)

条件(*)を満たす三つの行列 A, B, C は (1) より

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & -\cos \theta_1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & \sin \theta_3 \\ \sin \theta_3 & -\cos \theta_3 \end{pmatrix}$$

と表されるから、

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & -\cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - \theta_2) & -\sin(\theta_1 - \theta_2) \\ \sin(\theta_1 - \theta_2) & \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。ここで $\theta_1 - \theta_2 = \alpha$ とおくと

$$\begin{aligned} ABC &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & \sin \theta_3 \\ \sin \theta_3 & -\cos \theta_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \theta_3 - \sin \alpha \sin \theta_3 & \cos \alpha \sin \theta_3 + \sin \alpha \cos \theta_3 \\ \sin \alpha \cos \theta_3 + \cos \alpha \sin \theta_3 & \sin \alpha \sin \theta_3 - \cos \alpha \cos \theta_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \theta_3) & \sin(\alpha + \theta_3) \\ \sin(\alpha + \theta_3) & -\cos(\alpha + \theta_3) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって $\phi = \theta_1 - \theta_2 + \theta_3$ とおけば

$$ABC = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix}$$

となり、(1) よりこれも条件(*)を満たす。また、 ϕ は θ_1, θ_3 について可換であるから、

$$ABC = CBA$$

となる。よって題意は示された。

(証明終)

(1)

$$\begin{aligned}
 i(n+1-i)-n &= (i-1)n-(i-1)i \\
 &= (i-1)(n-i) \\
 &\geq 0 \quad (\because 1 \leq i \leq n)
 \end{aligned}$$

$$\therefore n \leq i(n+1-i)$$

となる。等号は $i=1, n$ のとき成立する。また,

$$\begin{aligned}
 i(n+1-i) &= -i^2 + (n+1)i \\
 &= -\left(i - \frac{n+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\
 &\leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2
 \end{aligned}$$

$$\therefore i(n+1-i) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

となる。等号は n が奇数の時のみ, $i = \frac{n+1}{2}$ で成立する。以上のことから題意は示された。

(証明終)

(2)

(1)と $n > 0$ から

$$0 < n \leq i(n+1-i) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

であるから, $i=1 \sim n$ までの n 個の式の辺々を掛け合わせることで

$$0 < n^n \leq 1^2 \cdot 2^2 \cdots n^2 \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}$$

となる。よって辺々の平方根を考えることで

$$\sqrt{n^n} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

を得る。

(証明終)

(1)

さいころの出た目、 M 氏の位置、 N 氏の位置、 j の値の関係は以下の表のようになる。

出た目	1	2	3	4	5	6
M 氏の位置	A_2	A_3	A_4	A_5	A_1	A_2
N 氏の位置	A_2	A_5	A_4	A_1	A_3	A_2
j	0	2	0	1	2	0

よって

$$p_0 = \frac{1}{2}, p_1 = \frac{1}{6}, p_2 = \frac{1}{3}, p_3 = p_4 = 0$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_0 = \frac{1}{2}, p_1 = \frac{1}{6}, p_2 = \frac{1}{3}, p_3 = p_4 = 0$$

(2)

各回の j の値を j_1, j_2, j_3 とすれば、 $j_1 + j_2 + j_3$ が 5 の倍数となれば、(*)を三回行った後 M 氏と N 氏は同じ頂点にいることになる。このような j_1, j_2, j_3 の組は $(0, 0, 0)$ もしくは $(2, 2, 1)$ を並べ替えたもののみであるから、求める確率は

$$\begin{aligned} p_1^3 + 3p_1p_2^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \frac{13}{72} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{13}{72}$$