

1

(1)

n が非常に大きいとき、1の面がどこに位置するかは等確率であると予想される。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{6}$$

となると予想される。

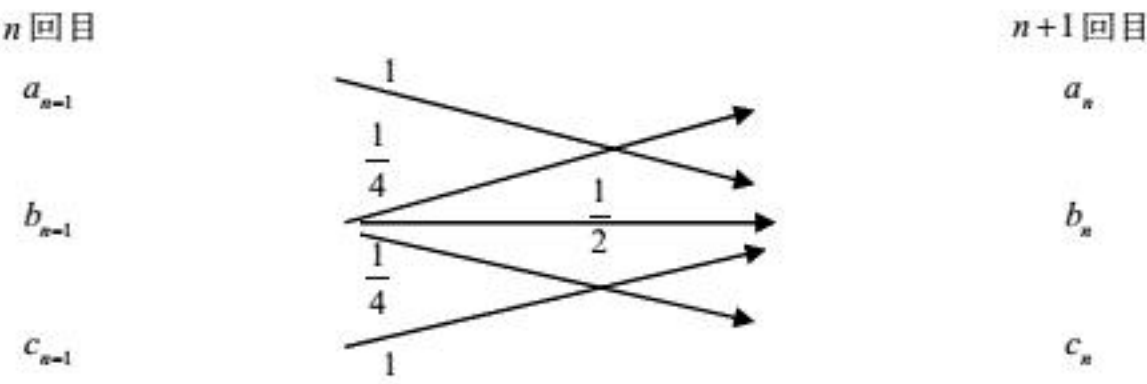
(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{6}$

(2)

n	0	1	2	3
a_n	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
b_n	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
c_n	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$a_n + b_n + c_n$	1	1	1	1

(答) 前表

(3)



上の遷移図より各項の関係は以下になる。

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{4}b_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} + \frac{1}{2}b_{n-1} + c_{n-1} \\ c_n = \frac{1}{4}b_{n-1} \end{cases}$$

(答) $\begin{cases} a_n = \frac{1}{4}b_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} + \frac{1}{2}b_{n-1} + c_{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \\ c_n = \frac{1}{4}b_{n-1} \end{cases}$

(4)

(3)より $n \geq 1$ について $a_n = c_n$, $b_n = 4a_{n+1}$ であるから、 $n \geq 3$ に関して

$$\begin{aligned} 4a_{n+1} &= a_{n-1} + 2a_n + a_{n-1} \\ \Leftrightarrow 2a_{n+1} &= a_n + a_{n-1} \\ \Leftrightarrow 2a_{n+1} + a_n &= 2a_n + a_{n-1} \\ &= 2a_3 + a_2 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

を得る。よって $n \geq 4$ に関して

$$a_n = -\frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{4}$$

を得る。

(答) $a_n = -\frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{4}$

(5)

(4)より $n \geq 4$ において

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow a_n - \frac{1}{6} &= -\frac{1}{2}\left(a_{n-1} - \frac{1}{6}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3}\left(a_3 - \frac{1}{6}\right) \\ &= \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3} \\ &= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \therefore a_n &= \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

となる。これは $n=1, 2, 3$ でも満たされる。また、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

であるから、確かに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{6}$$

である。

(答) $a_n = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad (n \geq 1), \quad a_0 = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{6}$

(1)

$$\begin{aligned}
 f(x+\pi) &= |\sin(x+\pi)| + \sqrt{3}|\cos(x+\pi)| \\
 &= |\sin x| + \sqrt{3}|\cos x| \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

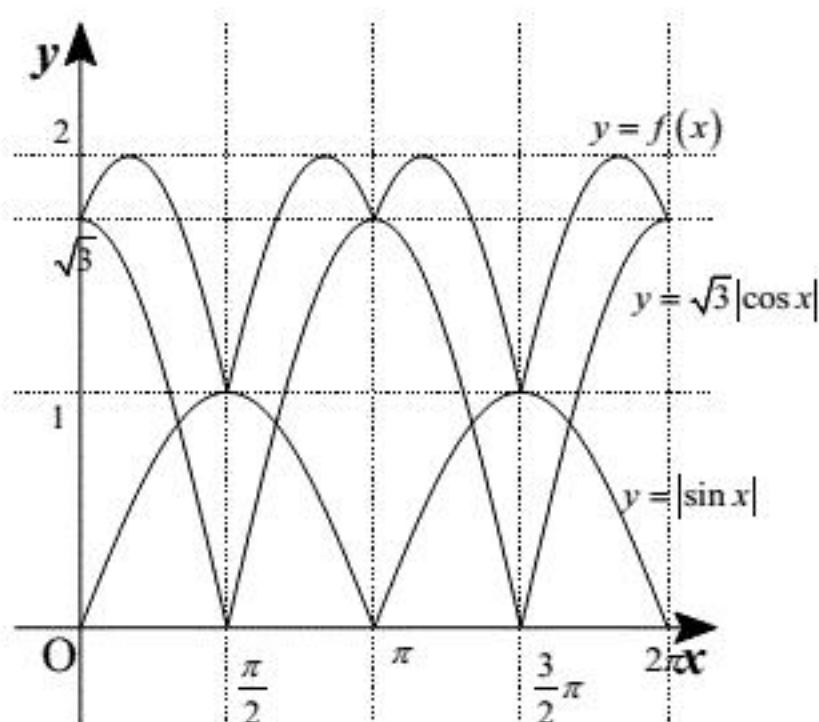
となるから、 $f(x)$ は周期 π の周期関数である。また、

$$\begin{aligned}
 f(-x+\pi) &= |\sin(-x+\pi)| + \sqrt{3}|\cos(x+\pi)| \\
 &= |\sin x| + \sqrt{3}|\cos x| \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

となるから、 $y=f(x)$ のグラフは $x=\frac{\pi}{2}$ に関して対称となる。よって $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sin x + \sqrt{3} \cos x \\
 &= 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)
 \end{aligned}$$

となるから、それぞれのグラフは下のようになる。



(答) 前図

(2)

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において

$$f(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

となるから、 $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$ で最大値 2 を取る。また(1)より $y=f(x)$ は $x=\frac{\pi}{2}$ に関して対

称であり、 π の周期関数であるから、 $x = \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$ においても最大値 2 を取る。また、最

小値は(1)より $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ のとき 1 をとる。

(答) 最大値 2 $\left(x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi\right)$, 最小値 1 $\left(x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

(3)

求める面積を S とすると、対称性と周期性から S は $y=f(x)$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$ で囲まれる

面積の 4 倍である。よって

$$\begin{aligned}
 S &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (|\sin x| + \sqrt{3}|\cos x|) dx \\
 &= 4 \left[-\cos x + \sqrt{3} \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= 4\sqrt{3} + 4
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $4\sqrt{3} + 4$