

(1)

$x > 0$ であるから,

$$\begin{aligned}\log\left(1+\frac{1}{x}\right) &= \log\left(\frac{x+1}{x}\right) \\ &= \log(x+1) - \log x\end{aligned}$$

となる。関数 $\log x$ は区間 $[x, x+1]$ で連続で微分可能であり,

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

であるから、平均値の定理より

$$\frac{\log(x+1) - \log x}{x+1-x} = \frac{1}{c}$$

となる実数 c が $x < c < x+1$ の範囲で存在する。これらを変形して

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+1} &< c < \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} &< \log(x+1) - \log x < \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} &< \log\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(2)

$y = \frac{1}{x}$, $y = \log\left(1+\frac{1}{x}\right)$, $x=1$, $x=a$ で囲まれる面積 S は

$$\begin{aligned}S &= \int_1^a \left\{ \frac{1}{x} - \log\left(1+\frac{1}{x}\right) \right\} dx \\ &= [\log x]_1^a - \int_1^a \{ \log(x+1) - \log x \} dx \\ &= \log a - \left[(x+1) \{ \log(x+1) - 1 \} - x(\log x - 1) \right]_1^a \\ &= -(a+1) \log\left(1+\frac{1}{a}\right) + 2 \log 2\end{aligned}$$

となる。 $a > 1$ であるから、(1)より

$$\begin{aligned}S &< -(a+1) \frac{1}{a+1} + 2 \log 2 \\ \Rightarrow S &< 2 \log 2 - 1\end{aligned}$$

となる。よって題意は示された。

(証明終)

(1)

 $A^2 = E$ の両辺の行列式をとると

$$(\det A)^2 = 1$$

$$\therefore \det A = \pm 1$$

となる。よって逆行列 A^{-1} が存在するから、 $'AA = A^2$ の両辺に右から A^{-1} をかけることにより

$$'A = A$$

$$\therefore b = c$$

を得る。 $A^2 = E$ の両辺に A^{-1} をかけることにより

$$A = A^{-1}$$

となり、 $\det A = \pm 1$ より

$$A^{-1} = \pm \begin{pmatrix} d & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

となる。ここで $\det A = 1$ のとき $A = A^{-1}$ より

$$\begin{cases} a = d \\ b = -b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = d, b = 0$$

となるが、 $\det A = 1$ より

$$ad - bc = 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 1$$

$$\therefore a = d = \pm 1$$

となり、これは仮定に反する。よって $\det A = -1$ であり、このとき $A = A^{-1}$ より

$$a = -d$$

を得る。再び $\det A = -1$ より

$$ad - bc = -1$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$$

を得る。よって $-1 \leq a \leq 1$ であるから、 $a = \cos \theta$ とおくと

$$b = c = \pm \sin \theta, d = -\cos \theta$$

を得る。ここで、 $b = c = \sin \theta$ のとき、

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

となり、 $b = c = -\sin \theta$ のとき、 $\varphi = -\theta$ とおくと、

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ -\sin(-\varphi) & -\cos(-\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるため、ここで再び $\varphi \rightarrow \theta$ とみなすことで、

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

を得る。逆に $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ のとき、条件(*)は満たされるから、題意は示された。

(証明終)

(2)

条件(*)を満たす三つの行列 A, B, C は (1) より

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & -\cos \theta_1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & \sin \theta_3 \\ \sin \theta_3 & -\cos \theta_3 \end{pmatrix}$$

と表されるから、

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & -\cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - \theta_2) & -\sin(\theta_1 - \theta_2) \\ \sin(\theta_1 - \theta_2) & \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。ここで $\theta_1 - \theta_2 = \alpha$ とおくと

$$\begin{aligned} ABC &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & \sin \theta_3 \\ \sin \theta_3 & -\cos \theta_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \theta_3 - \sin \alpha \sin \theta_3 & \cos \alpha \sin \theta_3 + \sin \alpha \cos \theta_3 \\ \sin \alpha \cos \theta_3 + \cos \alpha \sin \theta_3 & \sin \alpha \sin \theta_3 - \cos \alpha \cos \theta_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \theta_3) & \sin(\alpha + \theta_3) \\ \sin(\alpha + \theta_3) & -\cos(\alpha + \theta_3) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって $\phi = \theta_1 - \theta_2 + \theta_3$ とおけば

$$ABC = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix}$$

となり、(1) よりこれも条件(*)を満たす。また、 ϕ は θ_1, θ_3 について可換であるから、

$$ABC = CBA$$

となる。よって題意は示された。

(証明終)