

数 学

注 意 事 項

試験開始の合図があるまでは、この冊子を開いてはいけない。

1. この冊子の本文は 3 ページである。印刷の不鮮明な部分、ページの脱落などがあつた場合は申し出ること。
2. 答案用紙には、すべてに受験番号と氏名を記入すること。

記入例

受験 番号	1	2	3	4	5	氏名	(氏 名)
----------	---	---	---	---	---	----	-------

3. この冊子の余白部分は下書きに使用してもよい。
4. この冊子及び下書き用紙は持ち帰ること。

数 学 問 題

解答は、それぞれ問題の番号に対応する答案用紙に書くこと.

1 n を自然数とする. 以下の各問いに答えよ.

- (1) n を 3 で割った余りが 1 ならば, すべての自然数 m に対して n^m を 3 で割った余りは 1 であることを示せ.
- (2) n を 3 で割った余りが 2 ならば, すべての奇数 m に対して n^m を 3 で割った余りは 2 であることを示せ.
- (3) n^m を 3 で割った余りが 2 となる自然数 m があれば, n を 3 で割った余りも 2 であることを示せ.

2

以下の各問いに答えよ.

- (1) $\alpha < \beta$ を満たす実数 α, β に対して,

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

を示せ.

- (2) 放物線 P を $y = -x^2 + 2x + 4$ で定める. 点 (p, q) が直線 $y = -2x + 1$ の上を動くとき, $y = (x - p)^2 + q$ で定める放物線 Q が P と共有点をもつような p の範囲を求めよ.

- (3) p が(2)で求めた範囲を動くとき, P と Q で囲まれた図形の面積の最大値を求めよ.

- 3 座標平面の点 P_0, P_1, P_2 をそれぞれ $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ とし, また 3 以上の自然数 k に対し, 点 P_k を

$$\overrightarrow{P_{k-3}P_k} = 2(\overrightarrow{P_{k-3}P_{k-1}} + \overrightarrow{P_{k-3}P_{k-2}})$$

を満たすように順に定めていく. 2 以上の自然数 k に対し, 3 点 P_{k-2}, P_{k-1}, P_k を頂点とする三角形の面積を $f(k)$ とおく. このとき, 以下の各問いに答えよ.

(1) $f(3)$ を求めよ.

(2) $\frac{f(k+1)}{f(k)}$ を求めよ.

(3) n を 2 以上の自然数とする. $\sum_{k=2}^n f(k)$ を求めよ.