

(1)

問題文の条件より、 $b > 0, d > 0$ であるから

$$\frac{c}{d} < \frac{a}{b} \Leftrightarrow ad - bc > 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また

$$\begin{aligned} \frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d} &= \frac{ad + cd - bc - cd}{d(b+d)} \\ &= \frac{ad - bc}{d(b+d)} \end{aligned}$$

であり、 $a, b, c, d > 0$ と①をあわせて

$$\begin{aligned} \frac{ad - bc}{d(b+d)} &> 0 \\ \therefore \frac{c}{d} &< \frac{a+c}{b+d} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

を得る。同様に

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d} &= \frac{ab + ad - ab - bc}{b(b+d)} \\ &= \frac{ad - bc}{b(b+d)} \end{aligned}$$

であり、 $a, b, c, d > 0$ と①をあわせて

$$\begin{aligned} \frac{ad - bc}{d(b+d)} &> 0 \\ \therefore \frac{a+c}{b+d} &< \frac{a}{b} \end{aligned}$$

を得る。これと②を合わせて

$$\frac{c}{d} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{a}{b}$$

は示された。

(証明終)

(2)

問題文の条件より、 $b > 0, d > 0, x > 0$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{c}{d} &< \frac{y}{x} < \frac{a}{b} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} ax - by > 0 \\ dy - cx > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

であり、 a, b, c, d, x, y は全て正の整数であるので、 $ax - by, dy - cx$ はともに正の整数である。
よって

$$ax - by \geq 1, dy - cx \geq 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

である。ここで③と $ad - bc = 1$ より

$$\begin{aligned} x &= (ad - bc)x \\ &> d(ax - by) + b(dy - cx) \\ &\geq b + d \\ y &= (ad - bc)y \\ &> a(dy - cx) + c(ax - by) \\ &\geq a + c \end{aligned}$$

となる。よって題意は示された。

(証明終)

(1)

(i)

$y = x + \frac{1}{x}$ であることから

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= y^3 - 3y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4 + \frac{1}{x^4} &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 \\ &= \left\{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right\}^2 - 2 \\ &= (y^2 - 2)^2 - 2 \\ &= y^4 - 4y^2 + 2 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y, \quad x^4 + \frac{1}{x^4} = y^4 - 4y^2 + 2$$

(ii)

$\alpha = 0$ は与式を満たさないので、与式を α^3 で割ると

$$\alpha^3 + \alpha^2 - 9\alpha - 10 - \frac{9}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3} = 0$$

となる。ここで $\beta = \alpha + \frac{1}{\alpha}$ とおくと、上式より

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \alpha^2 - 9\alpha - 10 - \frac{9}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3} &= \beta(\beta^2 - 3) + (\beta^2 - 2) - 9\beta - 10 \\ &= \beta^3 + \beta^2 - 12\beta - 12 \\ &= (\beta + 1)(\beta^2 - 12) \end{aligned}$$

$$\therefore \beta = -1, \pm 2\sqrt{3}$$

を得る。 $\beta = \alpha + \frac{1}{\alpha}$ であるから

$$\beta = -1, \pm 2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \frac{1}{\alpha} = -1 \\ \alpha + \frac{1}{\alpha} = \pm 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \\ \alpha^2 \mp 2\sqrt{3}\alpha + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \sqrt{3} \pm \sqrt{2}, -\sqrt{3} \pm \sqrt{2}$$

となる。

$$(答) \quad \alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \sqrt{3} \pm \sqrt{2}, -\sqrt{3} \pm \sqrt{2}$$

(2)

任意の 2 つの正の実数 α, β について

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \\ &= \frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}{\alpha\beta} + \frac{2\alpha\beta}{\alpha\beta} \\ &= \frac{(\alpha - \beta)^2}{\alpha\beta} + 2 \\ &\geq 2 (\because \alpha\beta > 0, (\alpha - \beta)^2 \geq 0) \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{a_k}{a_l} \\ &= n + \sum_{k \neq l} \frac{a_k}{a_l} \\ &\geq n + 2 \cdot {}_n C_2 \\ &= n + n(n-1) \\ &= n^2 \end{aligned}$$

となり、題意は示された。

(証明終)

$Q(0, a, b)$, $R(X, Y, 0)$ とおく。 $\overline{PQ} = (-1, a, b-1)$ とかけるから、直線 PQ の方程式は実数 t を用いて

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ b-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ at \\ 1+(b-1)t \end{pmatrix}$$

となる。点 R は直線 PQ 上にあるから

$$\begin{cases} X = 1-t \\ Y = at \\ 0 = 1+(b-1)t \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。 $b=1$ が上式を満たさないことから

$$t = \frac{1}{1-b}$$

となるので

$$X-1 = \frac{1}{b-1}$$

を得る。 $X=1$ は上式を満たさないので、

$$b-1 = \frac{1}{X-1}$$

$$\therefore b = \frac{X}{X-1} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。また①式より

$$Y = at$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{a}{1-b}$$

$$\Leftrightarrow Y = a(1-X)$$

$$\therefore a = \frac{Y}{1-X} (\because X \neq 1) \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。ここで点 Q は円 $y^2 + (z-3)^2 = 1$ 上にあるので

$$a^2 + (b-3)^2 = 1 \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。④式に②、③式を代入することにより

$$\left(\frac{Y}{1-X} \right)^2 + \left(\frac{X}{X-1} - 3 \right)^2 = 1$$

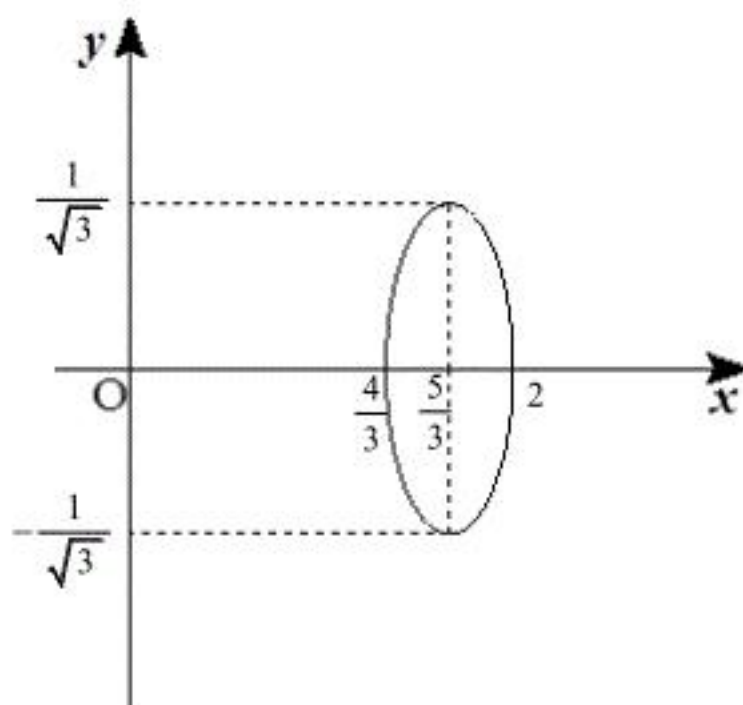
$$\Leftrightarrow Y^2 + (2X-3)^2 = (X-1)^2 \text{ かつ } X \neq 1$$

$$\Leftrightarrow 3X^2 - 10X + 8 + Y^2 = 0 \text{ かつ } X \neq 1$$

$$\Leftrightarrow 3 \left(X - \frac{5}{3} \right)^2 + Y^2 = \frac{1}{3} \text{ かつ } X \neq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(X - \frac{5}{3} \right)^2}{\left(\frac{1}{3} \right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2} = 1 \text{ かつ } X \neq 1$$

を得る。ここで、楕円 $3x^2 - 10x + 8 + y^2 = 0$ 上で $x=1$ となる点はないから、求める軌跡は楕円 $3x^2 - 10x + 8 + y^2 = 0$ であり、概形は下の通りである。



(答) 楕円: $3x^2 - 10x + 8 + y^2 = 0$ (上図)