

(1)

問題文の条件より、 $b > 0, d > 0$ であるから

$$\frac{c}{d} < \frac{a}{b} \Leftrightarrow ad - bc > 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また

$$\begin{aligned} \frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d} &= \frac{ad + cd - bc - cd}{d(b+d)} \\ &= \frac{ad - bc}{d(b+d)} \end{aligned}$$

であり、 $a, b, c, d > 0$ と①をあわせて

$$\begin{aligned} \frac{ad - bc}{d(b+d)} &> 0 \\ \therefore \frac{c}{d} &< \frac{a+c}{b+d} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

を得る。同様に

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d} &= \frac{ab + ad - ab - bc}{b(b+d)} \\ &= \frac{ad - bc}{b(b+d)} \end{aligned}$$

であり、 $a, b, c, d > 0$ と①をあわせて

$$\begin{aligned} \frac{ad - bc}{d(b+d)} &> 0 \\ \therefore \frac{a+c}{b+d} &< \frac{a}{b} \end{aligned}$$

を得る。これと②を合わせて

$$\frac{c}{d} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{a}{b}$$

は示された。

(証明終)

(2)

問題文の条件より、 $b > 0, d > 0, x > 0$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{c}{d} &< \frac{y}{x} < \frac{a}{b} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} ax - by > 0 \\ dy - cx > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

であり、 a, b, c, d, x, y は全て正の整数であるので、 $ax - by, dy - cx$ はともに正の整数である。

よって

$$ax - by \geq 1, dy - cx \geq 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

である。ここで③と $ad - bc = 1$ より

$$\begin{aligned} x &= (ad - bc)x \\ &> d(ax - by) + b(dy - cx) \\ &\geq b + d \\ y &= (ad - bc)y \\ &> a(dy - cx) + c(ax - by) \\ &\geq a + c \end{aligned}$$

となる。よって題意は示された。

(証明終)

(l)

(i)

$y = x + \frac{1}{x}$ であることから

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= y^3 - 3y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4 + \frac{1}{x^4} &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 \\ &= \left\{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right\}^2 - 2 \\ &= (y^2 - 2)^2 - 2 \\ &= y^4 - 4y^2 + 2 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y, \quad x^4 + \frac{1}{x^4} = y^4 - 4y^2 + 2$$

(ii)

$\alpha = 0$ は与式を満たさないので、与式を α^3 で割ると

$$\alpha^3 + \alpha^2 - 9\alpha - 10 - \frac{9}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3} = 0$$

となる。ここで $\beta = \alpha + \frac{1}{\alpha}$ とおくと、上式より

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \alpha^2 - 9\alpha - 10 - \frac{9}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3} &= \beta(\beta^2 - 3) + (\beta^2 - 2) - 9\beta - 10 \\ &= \beta^3 + \beta^2 - 12\beta - 12 \\ &= (\beta + 1)(\beta^2 - 12) \end{aligned}$$

$$\therefore \beta = -1, \pm 2\sqrt{3}$$

を得る。 $\beta = \alpha + \frac{1}{\alpha}$ であるから

$$\begin{aligned} \beta &= -1, \pm 2\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \frac{1}{\alpha} = -1 \\ \alpha + \frac{1}{\alpha} = \pm 2\sqrt{3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \\ \alpha^2 \mp 2\sqrt{3}\alpha + 1 = 0 \end{cases} \\ \therefore \alpha &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \sqrt{3} \pm \sqrt{2}, -\sqrt{3} \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \sqrt{3} \pm \sqrt{2}, -\sqrt{3} \pm \sqrt{2}$$

(2)

任意の 2 つの正の実数 α, β について

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \\ &= \frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}{\alpha\beta} + \frac{2\alpha\beta}{\alpha\beta} \\ &= \frac{(\alpha - \beta)^2}{\alpha\beta} + 2 \\ &\geq 2 (\because \alpha\beta > 0, (\alpha - \beta)^2 \geq 0) \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{a_k}{a_l} \\ &= n + \sum_{k \neq l} \frac{a_k}{a_l} \\ &\geq n + 2 \cdot {}_nC_2 \\ &= n + n(n-1) \\ &= n^2 \end{aligned}$$

となり、題意は示された。

(証明終)

部分積分法を用いることによって、左辺の定積分は

$$\begin{aligned}
 \int_0^x t^2 \sin(x-t) dt &= \left[t^2 \cos(x-t) \right]_0^x - 2 \int_0^x t \cos(x-t) dt \\
 &= x^2 - 2 \left[-t \sin(x-t) \right]_0^x + 2 \int_0^x -\sin(x-t) dt \\
 &= x^2 + 2 \left[-\cos(x-t) \right]_0^x \\
 &= x^2 - 2 + 2 \cos x
 \end{aligned}$$

となる。よって、与えられた方程式の解は

$$\begin{aligned}
 x^2 &= x^2 - 2 + 2 \cos x \\
 \Leftrightarrow \cos x &= 1 \\
 \therefore x &= 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})
 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $x = 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$