

1

(1)

$y = x \log x$ とおくと

$$y' = \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$$

となる。 $y' = 0$ となるのは

$$x = \frac{1}{e}$$

で増減表は

x	0	...	$\frac{1}{e}$	...	1
y'		-	0	+	
y		$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	

となるので

$$-\frac{1}{e} \leq x \log x$$

となる。また、 $0 < x < 1$ で $\log x < 0$ より

$$x \log x < 0$$

となる。以上より

$$-\frac{1}{e} \leq x \log x < 0$$

が示された。

(証明終)

(2)

$\sqrt{x} = t$ とおく。 $0 < x < 1$ のとき

$$0 < t < 1$$

である。

$$\sqrt{x} \log x = t \log t^2 = 2t \log t$$

これと(1)より

$$-\frac{2}{e} \leq \sqrt{x} \log x < 0$$

となる。この式の各項に $\sqrt{x} (> 0)$ をかけると

$$\frac{2}{e} \sqrt{x} \leq x \log x < 0$$

となる。また、

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(-\frac{2}{e} \sqrt{x} \right) = 0$$

より、はさみうちの原理で

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$$

を得る。

(答) 0

(3)

体積 $V(\alpha)$ を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{V(\alpha)}{\pi} &= \int_{\alpha}^1 (x \log x)^2 dx \\ &= \int_{\alpha}^1 x^2 (\log x)^2 dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} (\log x)^2 \right]_{\alpha}^1 - \frac{2}{3} \int_{\alpha}^1 x^2 \log x dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} (\log x)^2 - \frac{2}{9} x^3 \log x \right]_{\alpha}^1 + \frac{2}{9} \int_{\alpha}^1 x^2 dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} (\log x)^2 - \frac{2}{9} x^3 \log x + \frac{2}{27} x^3 \right]_{\alpha}^1 \\ &= \frac{2}{27} - \frac{1}{3} \alpha^3 (\log \alpha)^2 + \frac{2}{9} \alpha^3 \log \alpha - \frac{2}{27} \alpha^3 \end{aligned}$$

$$\therefore V(\alpha) = \frac{2\pi}{27} - \frac{\pi}{3} \alpha^3 (\log \alpha)^2 + \frac{2\pi}{9} \alpha^3 \log \alpha - \frac{2\pi}{27} \alpha^3$$

となる。

$$(答) \frac{2\pi}{27} - \frac{\pi}{3} \alpha^3 (\log \alpha)^2 + \frac{2\pi}{9} \alpha^3 \log \alpha - \frac{2\pi}{27} \alpha^3$$

(4)

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow +0} \alpha^3 (\log \alpha)^2 &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \alpha \cdot (\alpha \log \alpha)^2 = 0 \\ \lim_{\alpha \rightarrow +0} \alpha^3 \log \alpha &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \alpha^2 \cdot (\alpha \log \alpha) = 0 \end{aligned} \quad (\because (2))$$

であるから、

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} V(\alpha) = \frac{2\pi}{27}$$

となる。

$$(答) \frac{2\pi}{27}$$

2

(1)

$x > 0, y > 0$ として、まず a, b, c, d の必要条件を求める。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

が第1象限にあり、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ax+by \\ -cx+dy \end{pmatrix}$$

が第2象限にあるとする。すなわち、

$$\begin{cases} ax+by > 0 & \dots \textcircled{1} \\ cx+dy > 0 & \dots \textcircled{2} \\ -ax+by < 0 & \dots \textcircled{3} \\ -cx+dy > 0 & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

が成り立つとする。このとき、

$$\textcircled{3} \Leftrightarrow ax-by > 0$$

なので、 $\textcircled{1}$ と辺々加えて

$$2ax > 0$$

となり、 $x > 0$ より

$$a > 0 \quad \dots \textcircled{5}$$

となる。同様に、 $\textcircled{2}$ と $\textcircled{4}$ より、

$$d > 0 \quad \dots \textcircled{6}$$

となる。また、 $y > 0$ より

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow b > -\frac{ax}{y}, \quad \textcircled{3} \Leftrightarrow b < \frac{ax}{y}$$

より

$$-\frac{ax}{y} < b < \frac{ax}{y}$$

であるから、 $x \rightarrow +0$ を考えて、はさみうちの原理より、

$$b = 0 \quad \dots \textcircled{7}$$

となり、同様に、 $\textcircled{2}$ と $\textcircled{4}$ より

$$c = 0 \quad \dots \textcircled{8}$$

となる。よって、 $\textcircled{5} \sim \textcircled{8}$ の条件が必要条件。逆に、 $\textcircled{5} \sim \textcircled{8}$ が成り立っているとき、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ dy \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ax \\ dy \end{pmatrix}$$

となり、十分である。以上より、求める条件は、

$$a > 0, d > 0, b = c = 0$$

であることがわかる。

(答) $a > 0, d > 0, b = c = 0$

(2)

(1)より

$$u = ax, v = dy$$

となり、常に $uv = 2xy$ より

$$ad = 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、 $(1, 1)$ は (a, d) に移るので

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2} |1 \cdot a - 1 \cdot d| = \frac{1}{2} |a - d| = 4$$

$$\therefore |a - d| = 8$$

となることがわかる。以下、 $a - d$ の値について場合分けして考える。

[1] $a - d = 8$ のとき

$d = a - 8$ を $\textcircled{1}$ に代入し

$$a^2 - 8a - 2 = 0$$

$a > 0$ より

$$a = 4 + 3\sqrt{2}$$

を得る。 $a - d = 8$ より

$$d = -4 + 3\sqrt{2}$$

となる。これは $d > 0$ を満たしている。

[2] $a - d = -8$ のとき

[1]と同様に考えて

$$a = -4 + 3\sqrt{2}, d = 4 + 3\sqrt{2}$$

となる。

以上より、求める A は

$$A = \begin{pmatrix} 4+3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -4+3\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4+3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 4+3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

であることがわかる。

$$(答) A = \begin{pmatrix} 4+3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -4+3\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4+3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 4+3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

3

(1)

三角形の内角の和は π であるから

$$\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2} = \frac{\pi}{2}$$

となる。よって

$$\tan\left(\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\angle C}{2}\right)$$

であり、ここで三角関数の加法定理と、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta}$$

より、

$$\frac{\tan \frac{\angle A}{2} + \tan \frac{\angle B}{2}}{1 - \tan \frac{\angle A}{2} \cdot \tan \frac{\angle B}{2}} = \frac{1}{\tan \frac{\angle C}{2}} \left(\because 0 < \frac{\angle C}{2} < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\therefore \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta} = \frac{1}{\gamma}$$

となるから、

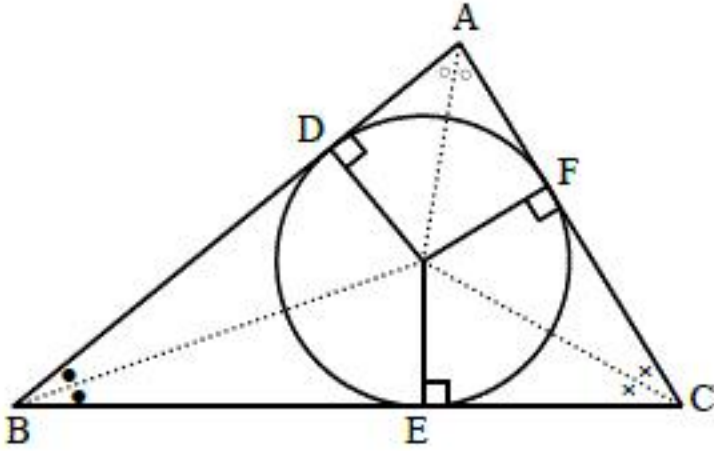
$$\gamma = \frac{1 - \alpha\beta}{\alpha + \beta}$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad \gamma = \frac{1 - \alpha\beta}{\alpha + \beta}$$

(2)

下図のように点D, E, Fを定める。



このとき、内接円の半径が1であり、 $\tan \frac{\angle A}{2} \neq 0$ より

$$AD = AF = \frac{1}{\tan \frac{\angle A}{2}} = \frac{1}{\alpha}$$

であり、同様に

$$BD = BE = \frac{1}{\beta}$$

$$CE = CF = \frac{1}{t}$$

であるから、 $\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{t} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{\alpha} \right)$$

$$= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{t}$$

となる。ここで、(1)と同様に β を α, t であらわすと

$$\beta = \frac{1 - t\alpha}{\alpha + t}$$

となるから、

$$S = \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + t}{1 - t\alpha} + \frac{1}{t}$$

となる。 t は定数なので S を α の関数とみなすことができる。

$$\frac{dS}{d\alpha} = -\frac{1}{\alpha^2} + \frac{(1 - t\alpha) + t(\alpha + t)}{(1 - t\alpha)^2}$$

$$= \frac{\alpha^2 + 2t\alpha - 1}{\alpha^2(1 - t\alpha)^2}$$

$$= \frac{\left\{ \alpha - (-t + \sqrt{1 + t^2}) \right\} \left\{ \alpha - (-t - \sqrt{1 + t^2}) \right\}}{\alpha^2(1 - t\alpha)^2}$$

よって、 $\alpha > 0$ での S の増減表は以下のようになる。

α	(0)	...	$\sqrt{1+t^2} - t$	...
$\frac{dS}{d\alpha}$		-	0	+
S		$\searrow$	最小	$\nearrow$

よって、 S は

$$\alpha = \sqrt{1 + t^2} - t$$

で最小で、そのとき

$$S = \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + t}{1 - t\alpha} + \frac{1}{t}$$

$$= \frac{\alpha + t}{\alpha t(1 - t\alpha)}$$

$$= \frac{\sqrt{1 + t^2}}{\left(\sqrt{1 + t^2} - t \right) t \left(1 + t^2 - t\sqrt{1 + t^2} \right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{1 + t^2} + t \right)^2}{t}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\left(\sqrt{1 + t^2} + t \right)^2}{t}$$

(3)

(2)で求めた S の最小値を $f(t)$ とする。 $t > 0$ での $f(t)$ の最小値を求めればよい。

$$f'(t) = \frac{2\left(\sqrt{1+t^2}+t\right)\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}+1\right)t-\left(\sqrt{1+t^2}+t\right)^2}{t^2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{1+t^2}+t\right)^2}{t^2} \cdot \underline{\underline{\left(\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}-1\right)}}$$

部を $g(t)$ とすると

$$g'(t) = \frac{2\sqrt{1+t^2} - 2t \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2} = \frac{2}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

で $g(t)$ は単調増加。また、

$$g(t) = 0 (\Leftrightarrow f'(t) = 0)$$

となるのは

$$2t = \sqrt{1 + t^2}$$

より

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}} (\because t > 0)$$

である。よって、 $f(t)$ の $t > 0$ での増減表は以下のようになる。

t	0	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$		$\searrow$	最小	$\nearrow$

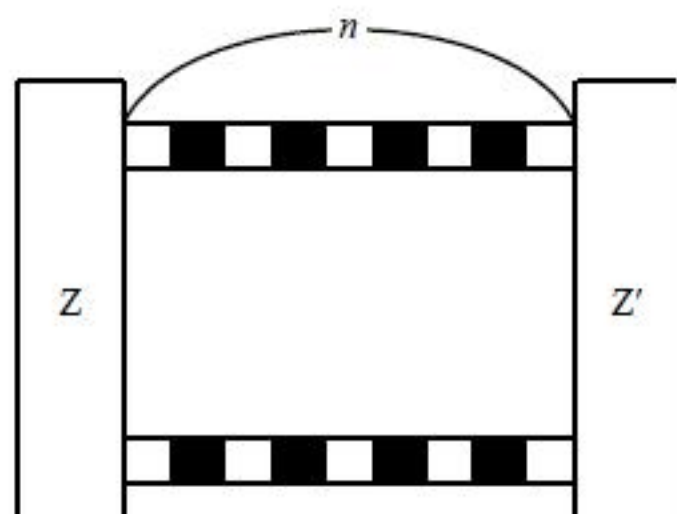
したがって、 $f(t)$ は $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ で最小で、このとき

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3\sqrt{3}$$

であるから、求める値は $3\sqrt{3}$ であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad 3\sqrt{3}$$

(1)



上図のように、確率 p で開く通路が n 個ならんだ道が上下に部屋 Z から Z' をつないでいるとき、 Z から Z' が開通している確率を $P(n)$ とする。 Z から Z' が開通しているためには

「上の道が開通」 または 「下の道が開通」

していることが必要十分である。「上の道が開通」する確率は n 個の通路がすべて開いている確率で

$$p^n$$

であり、また「下の道が開通」する確率も

$$p^n$$

である。さらに「上の道が開通」かつ「下の道が開通」の確率は上下 $2n$ 個の通路が開くときで

$$p^{2n}$$

である。したがって、

$$P(n) = p^n + p^n - p^{2n} = p^n (2 - p^n)$$

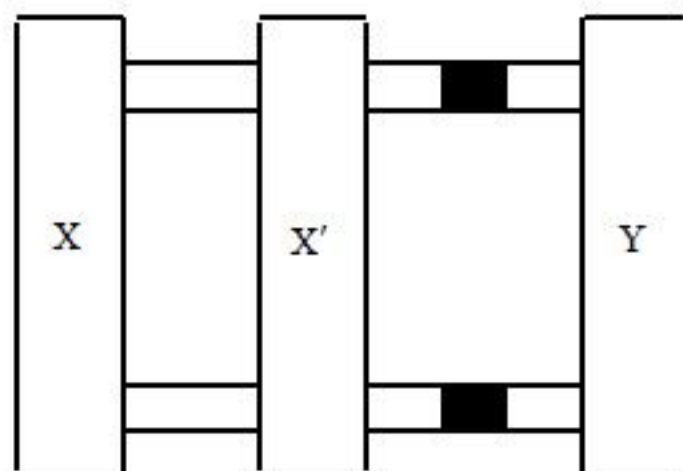
となるから、 $q=0, r=0$ のとき X から Y がつながる確率は

$$P(3) = p^3 (2 - p^3)$$

である。

(答) $p^3 (2 - p^3)$

(2)



$q=1, r=0$ のときは、通路 G をひとつの部屋として考えてもよく (X' とする), $X \rightarrow X'$ かつ $X' \rightarrow Y$ が開通する確率をそれぞれ考えることで、 $X \rightarrow Y$ が開通する確率は

$$\begin{aligned} P(1) \cdot P(2) &= p(2-p) \cdot p^2 (2-p^2) \\ &= p^3 (2-p) (2-p^2) \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $p^3 (2-p) (2-p^2)$

(3)

$q=1, r=1$ のときも、(2) と同様に考え

$$P(1) \cdot P(1) \cdot P(1) = p^3 (2-p)^3$$

と求まる。

(答) $p^3 (2-p)^3$

(4)

[1] G が開き、 H が開く確率

$$qr$$

[2] G が開き、 H が閉じる確率

$$q(1-r)$$

[3] G が閉じ、 H が開く確率

$$(1-q)r$$

[4] G が閉じ、 H が閉じる確率

$$(1-q)(1-r)$$

それぞれの場合について(2)と同様に考えると、求める確率は

$$\begin{aligned} &qr \{P(1)\}^3 + q(1-r)P(1)P(2) + (1-q)rP(1)P(2) + (1-q)(1-r)P(3) \\ &= p^3 \{ (2-p)^3 qr + (2-p)(2-p^2)(q+r-2qr) + (2-p^3)(1-q)(1-r) \} \end{aligned}$$

となることがわかる。

(答) $p^3 \{ (2-p)^3 qr + (2-p)(2-p^2)(q+r-2qr) + (2-p^3)(1-q)(1-r) \}$